ISSN 1023-7526

傳播數學知識・促進數學教育

數學傳播 季刊

中央研究院數學研究所　發行

從“數學與諾貝爾獎”談起

周元燊院士演講——
我所知道的中央研究院數學所

周鴻經

對黃俊雄教授的一些追思

幾何專題

90
民國八十八年六月
第二十三卷第二期

數學傳播 季刊

稿　約

本刊以傳播數學知識及促進數學教育為宗旨。讀者對象包括中學、大學和研究所師生。大凡和數學有關之專題論述、教學心得、問題研討或書評書介都在歡迎之列。

來稿

一、文字應流暢精確, 以不超過一萬五千字為原則。

二、若有特定的讀者對象 (如中學程度、大學程度等) 請在文首註明。

三、較專技性文稿請附摘要, 並儘可能列出該文所使用之關鍵字、詞。

四、翻譯稿請附原文, 註明詳細出處, 並請取得原著作所有權人同意授權。

五、請用橫向有格稿紙繕寫清楚, 歡迎提供電腦磁片。

六、圖、表請用黑墨繪製白紙上, 黏貼文稿適當位置, 並請編列號碼。

七、翻譯稿所譯專有名詞, 其不常用或初用者請附註原文。

八、來稿請註明作者姓名、地址、服務機關或就讀學校及年級, 發表時可用筆名。

九、本刊對來稿有刪改權, 未能刊登稿件恕不退還, 請作者保留底稿。

十、請寄: 台北市南港區 (11529) 中央研究院數學研究所數學傳播編輯部。

發 行 人: 劉豐哲
出 版 者: 中央研究院數學研究所
地　　址: 臺北市南港區研究院路二段一二八號
(電話:27851211-轉 382)
編輯委員: 劉豐哲、謝聰智、黃啓瑞
杜寶生、葉永南、黃振芳
編　　輯: 呂素齡
出版登記: 局版北市誌字第 1110 號
印 刷 者: 永裕印刷廠
打 字 行: 星格瑪企業社
(電話:2620-1648)
總 經 銷: 學英文化事業有限公司
新店市民權路 130 巷 6 號
郵政劃撥: 0100434-8
中央研究院數學研究所
特　　價: 新臺幣 80 元
(長期訂購一年 300 元)
經 銷 處: 全省各大書局

台　　北: 文翔、衆文、弘雅、書香林、建宏、文源、薪橋、東方、文笙、黎明、今日、南陽、曉園、聯經、再興、偉新、文林、藝殿
桃 竹 苗: 華竹、水木、展書堂、華通、大薪
台　　中: 諾貝爾、文星、三民、敦煌、東興、主恩、東與、寶山、新大方、光南、紀伊國屋、黎明、中一、五南
嘉　　義: 諾貝爾、義豐、大人物、鴻圖、一全、立大
台　　南: 南台、南一、欣欣、成大圖書部、成大書城、文山、金寶、敦煌、超越
高　　雄: 百世、復文、開卷田、三銘、開卷、瓊林、敦煌
屏　　東: 百科、卓越、大中、立大

中華郵政台字第 3829 號第一類新聞紙

數學傳播 季刊

編者的話

幾何是數學中相當迷人的一支, 它涵蓋了平面幾何、拓樸學和微分幾何等, 且與現代物理學息息相關。本期「幾何」專題是由蔡宜洵教授策畫, 他邀請張海潮、吳志揚、張樹城三位教授和徐正梅老師分別從不同角度共同來探討這個有趣的領域。

張樹城教授的「Ricci 流和 Poincaré 猜測」一文試著用通俗的描述來表達 R. Hamilton 在 Ricci 流上的進展及其與 Poincaré 猜測之間的相互關係。本文以抛物型方程的觀點, 介紹某些類型的幾何流方程–Ricci 流, 進而描述其與幾何和與拓樸之間的相互關係。

量子力學與相對論是公認二十世紀中最革命性及最重要的物理理論, 他們和微分幾何有些什麼關聯? 請看吳志揚教授「廣義相對論中的量子效應–從幾何的觀點出發」。

張海潮教授寫了「球面上的測地線和一個平面幾何的問題」一文, 本文討論球面上的測地線和最短距離之間的問題。張教授在文末提出一個問題讓大家動動腦。如果您想進一步知道結果, 可以參看徐正梅老師「談地球上兩點間的球面距離」一文。徐老師在本文中對這個問題有詳細而生動的描述。

* * *

「爲什麼數學沒有諾貝爾獎?」 一直是大家談論的話題, 請聽一代數學大師陳省身院士怎麼說。陳院士在「從"數學與諾貝爾獎"談起」一文認爲「沒有諾貝爾獎是幸事」, 您認爲呢?

去年是中央研究院七十周年院慶, 數學所由周元燊院士演講, 回顧數學所由上海搬遷來台, 以至1980年的一段歷史。本演講由謝天長先生整理成「我所知道的中央研究院數學所」 一文。

林聰源教授在「牛頓計算π」一文中, 介紹牛頓使用其二項式定理及「反流術 (即積分)」, 計算π近似值的過程。

數學傳播季刊

90 第二十三卷 第二期

目錄

幾何專題

Ricci 流和 Poincaré 猜測 .... 張樹城 3

廣義相對論中的量子效應
——從幾何的觀點出發—— .... 吳志揚 9

球面上的測地線和一個平面幾何的問題 .... 張海潮 13

談地球上兩點間的球面距離 .... 徐正梅 16

從"數學與諾貝爾獎"談起 .... 陳省身 24

周元燊院士演講——我所知道的中央研究院數學所
(自1948至1980年) .... 謝天長記錄 26

周鴻經 .... 李新民・周廣周 36

對黃俊雄教授的一些追思 .... 楊重駿 44

高木貞治 (上) .... 顏一清 49

星空燦爛的數學 (I) ——托勒密如何編製弦表? . 蔡聰明 57

牛頓計算 π .... 林聰源 68

密碼的計數 .... 柳柏濂 74

Ricci 流和 Poincaré 猜測

張樹城

摘要: 本文試著用通俗的描述來表達 R. Hamilton在 Ricci 流 (flow) 上的進展及其與 Poincaré 猜測之間的相互關係。

1. 前言

1.1 幾何與非線性微分方程

微分幾何最基本的目的就是對一些幾何類給一個最適當的描述 - 這通常包含了分析結構及構造在這分析結構上的幾何類的描述; 則我們必須研究這些結構及幾何類如何彼此相互產生作用, 此類關係通常由某些微分方程所控制。一般來說, 對局部性的幾何類而言, 這些方程往往是線性的; 對全域性的幾何類, 其方程則是非線性的幾何類。譬如:

1. 調和映射方程。
2. 最小曲面方程。
3. Monge-Ampére 方程。
4. Yang-Mills 方程。
5. Euler-Lagrangian 方程, 即黎曼泛函的臨界度量方程。

以上這些方程都是 elliptic 方程, 這些方程的解的存在性可反應出一些很好的幾何結果。

值得一提的是: 爲了研究這些 elliptic 方程, 通常會有另一個相對應的 Parabolic 方程 (Heat flow)。

本文主要也是從這著眼點出發, 即從 Parabolic 方程的觀點, 介紹某些類型的幾何流 (Geometic flow) 方程–Ricci flow, 進而描述其與幾何拓樸之間的相互關係。

特別地, 我們將著重在 Ricci flow 與 Poincaré 猜測之間的關係。自從費瑪最後定理被證實以後, 數學界下一個可能達成的大目標就是解決–Poincaré 猜測。

1.2. Ricci flow 和 Poincaré 猜測

於1982, R. Hrmilton 考慮在 $M^n \times [0,T)$ 上的 Ricci flow(RF):

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij} \qquad (*)$$

及 Normalized Ricci flow(NRF):

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij} + \frac{2}{n} r gij \qquad (**)$$

其中 $g_{ij}(t)$ 爲 n維流形M上的度量, R_{ij} 爲 *Ricci* 曲率, $r = \frac{\int Rdn}{\int d\mu}$ 爲平均純曲率, R 爲純曲率。

Hamilton 於1982證明了

定理 A ([Hal], 1982): 在封閉的 (closed) 的3維黎曼流形 M^3 上, 假如 (**) 的初值度量 $g_{ij}(0)$ 的 Ricci 曲率是正的, 則對所有時間 t, (**) 的解存在, $g_{ij}(t)$ 逼近到正的常曲率度量, 而且 M^3 與 $\frac{S^3}{\Gamma}$ 可微同胚, 其中Γ爲有限群。

註 A:

1. 由定理 A 可知給定一 homotopy 3-sphere M, 如果 M 上存在一正 Ricci 曲率度量, 則 $M = S^3$, 所以 Poincaré 猜測在此情況下是對的。
2. 一般情況之下, (**) 可能會有奇異解出現, 因爲並非所有封閉的流形都會有 Einstein 度量; 另一方面, 短時間 (*) 光滑解的存在性總是成立的。
3. 此一定理可視爲解決 Poincaré 猜測的一大進展。類似地, S. T. Yau 也找到了非正純曲率的 Kählen-Einstein 度量, 進而解決了 Calabi 猜測。在此, Hamilton找到了正純曲率的 Einstein 度量。另外, Tian-Yau也找到了一些正純曲率的 Kählen-Einstein 度量。
4. 在固定體積之下, $\int_n Rd\mu$ 的 Euler-Lagrangian 方程爲 $-2R_{ij}+\frac{2}{n}Rg_{ij}=0$; 所以 (**) 式的右側式子並非其 Euler-Lagrangian 方程, 但 Hamilton 的想法基本上由此而來!

1.3 Thurston's Geometrization 猜測

簡單一句, Thurston's Geometrization 猜測描述說: 對每一個封閉3維流形, 皆可分解成幾個分量, 其中每一分量存在一個幾何結構 (geometric structure): $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$, $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$, Nil, Sol。

註 B: 上述的猜測提了3維統形的幾何與拓樸之間的關係; 而 Poincaré 猜測是其中的一個結果!([A])

R. Hamilton 的 Ricci flow 基本上是想利用幾何的方法來研究 Thurston's Geometrization猜測。大致上可分爲二大部份:

- 第一部份: 研究有限的時間內 (*) 的奇異解。
- 第二部份: 非奇異解的分類。

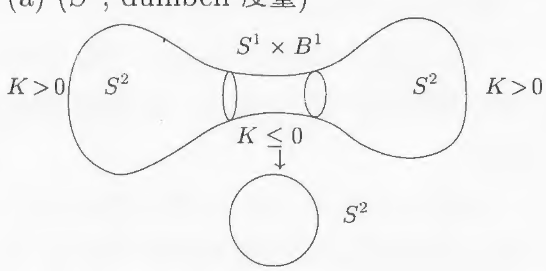
我們將詳述於後:

2. Ricci flow 的奇異解

2.1. Necks 和 Geometric surgery

首先, 我們注意到, (*) 的解沿著正 Ricci 曲率的方向向內收縮 (shrinking); 然而沿著負 Ricci 曲率的方向向外擴張 (expanding)。例如在 S^2上, (*) 的任何正曲率解在有限時間內將向內縮到一點。因此, 我們猜測一般的情況如下:

(a) (S^2, dumbell 度量)

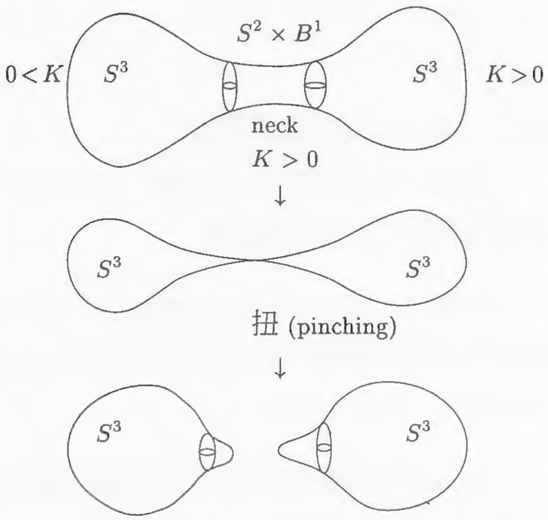


• 兩邊 S^2: 正曲率。

• 中間 Neck $S^1 \times B^1$: 很接近零的負曲率

我們預測兩邊向內收縮 (contract) 比中間向外擴張 (expanding) 來得快, 最初變成單一 S^2, 然後漸漸收到一點。

(b) (S^3, dumbell 度量)

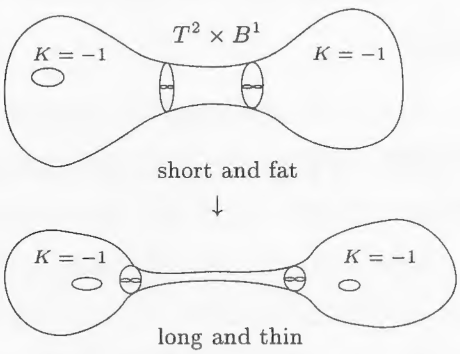


• 兩邊 S^3: 正曲率。

• 中間 Neck $S^2 \times B^1$: 正曲率。

預測 Neck $S^2 \times B^1$ 將向內收, 進而分出兩個 round S^3。

(c) (H^2,dumbell 度量)



• 兩邊 $K \equiv -1$

• 中間 Neck $T^2 \times B^1$: 曲率微負。

預測 Neck $T^2 \times B^1$ 將越來越長越薄, $\cdots$。

註 C:

1. 一般維度時, Neck:$N^p \times B^q \hookrightarrow M^n$, $n = p + q$。
2. 如上面 (a),(b), Hamilton的方法是在其產生奇異解之前做所謂的"幾何手術 (geomitric surgery)", 如

$$
\begin{aligned}
n &= 3 \\
& S^2 \times B^1 \to B^3 \times S^0 \\
n &= 4 \\
& S^3 \times B^1 \to B^4 \times S^0 \\
& S^2 \times B^2 \to B^3 \times S^1
\end{aligned}
$$

3. 例子 (C), 我們必須將解做適當的尺標變換 (rescaling), 然後再做2。
4. Hamilton 理解到下列的對應關係

$$
\left\{ \begin{array}{c} \text{Neck pinching} \\ \text{off} \end{array} \right\} \leftrightarrow
$$

$$
\left\{ \begin{array}{c} \text{Thuston's geometrization} \\ \text{猜測中的分解} \end{array} \right\}
$$

綜合以上討論, Hamilton 想分析在有限時間的奇異解的特性, 使得在奇異解產生以前, 能夠做所謂"幾何手術"如上, 然後把流形作適度的分解, 再讓 Ricci flow繼續作用下去, 進而得到非奇異解。

2.2. 3維和4維流形的奇異解

上一節的想法, 在某些四維流形上是可以做到的

定理 B ([Ha6], 1999): 在四維 closed 流形上, 如果存在有正的迷向 (isotropic) 曲率 (PIC), 則唯一的奇異解是如上所說的 Neck piching off, 如果在出現奇異解以前作“幾何手術”, 則流形可分解爲S^4, $\mathbb{R}P^4$, $S^3\times S^1$, $S^3\times^2 S^1$, 然後再考慮 Ricci flow, 則經過有限次的“手術”後, 我們得到空集合, 即表示 M 與 S^4 比 $\mathbb{R}P^4$, $S^3\times S^1$, $S^3\times^2 S^1$ 的 connected sum是可微同胚!

現在回到我們想理解的3維流形。

定理 C ([Ha9], 1999): 假設 $(M^3, g_{ij}(t))$ 是 $(*)$ 的奇異解, 則存在一子序列的尺標變換度量, 使得其收斂至 S^3/Γ, 或 $S^2\times\mathbb{R}/\Gamma$, 或 $\sum\times\mathbb{R}/\Gamma$, 其中$\Gamma$爲有限群, $\sum$ 是 cigar soliton (非緊緻, 在無窮遠處類似 cylinder)。

註 D:

(1) Hamilton 猜測 $\sum\times\mathbb{R}$ 的情況是不可能的, 其中一個重要工具是下面將介紹的“Little Loop Lemma”。

(2) 例如1是對的, 則這些尺標變換 度量將收斂至S^3/Γ或者可作一 surgery, 然後證明經過有限次後, 得到非奇異解。

(3) 果眞如此, 則整個問題就剩下這些非奇異解的分類了。

3. 3維流形的非奇異解之分類

3.1. 定義與例子

定義: 我們說 $(M^3, g_{ij}(t))$ 是 (**) 的非奇異解當對所有時間 $0\leq t<\infty$, $g_{ij}(t)$ 皆存在且其曲率一致有界。

例如: (**) 在任一封閉流形有非奇異解存在, 當初值度量 $g_{ij}(0)$ 是

(a) $(\sum^2, g_0)$: 任一閉曲面,

(b) (M^3, g_0): $Ric(g_0)>0$,

(c) (M^3, g_0): 局部 homogeneous 度量,

(d) $(M^4,_0)$: g_0 有正的曲率算子,

(e) (M, g_0): Kähler 流形, $C_1(M)=0$ 或 $C_1(M)<0$。

3.2. 3維流形的非奇異解

最後, 當M是閉3維流形時, 非奇異解的拓樸性質完全被分類出來。

定理 D ([Ha5], 1998): 假如 M^3 存在有 (**) 的非奇異解, 則我們可以完全把 M^3 分解成爲一些幾何結構.

由上第二節與第三節可知, 整個問題剩下來的就是如何去解決註 D(1) 的猜測了。下面我們提供一些可能的方法。

4. 極大值原理及 Harnack 估計

4.1. 極大值原理 (Maxinum Principle)

Ricci flow 之所以能夠在分析與幾何中建立關聯, 最基本的性質就是幾何量滿足所謂的極大值原理; 由此可知, 對所有進度而言, 正純曲率 R 及正曲率算子都被 $(*)$保持下來, 在特殊的3維流形中, 正 Ricci 曲率也被保持下來, 另外它用來證明了研究 Ricci flow 一個重要的估計–Harnack 不等式。

4.2. Harnack 估計

我們介紹下列的 Harnack 不等式:

定理 E ([Ha7], 1993): 假設 $(M, g_{ij}(t))$ 是 $(*)$的解, $g_{ij}(0)$有非負曲率算子R_{ijkl}, 則對任一向量場W, $2-$form U

$$\begin{aligned} Z &= M_{ij}W^iW^j + 2P_{ijk}U^{ij}W^k \\ &\quad + R_{ijkl}U^{ij}U^{kl} \geq 0. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} P_{ijk} &= D_iR_{jk} - \nabla_jR_{ik} \\ M_{ij} &= \triangle R_{ij} - \frac{1}{2}\nabla_i\nabla_jR \\ &\quad +2g^{kp}g^{lq}R_{ikjl}R_{pq} \\ &\quad -g^{kl}R_{ik}R_{jl} + \frac{1}{2t}R_{ij} \\ \nabla_i &= \text{Levi-Civita 連絡} \\ \triangle &= g_{ij}\nabla_i\nabla_j \end{aligned}$$

應用:

(1) Harnack 估計用來研究$(*)$的奇異解與 Ricci Soliton 之間的關係, 如 [Ha9]。

(2) 它也可用來證明下列的 "Little Loop Lemma":

對(m^3, g_0)而言, 如果 g_0 爲非負截面曲率度量, 則存在常數A, B, 使得如果在某時間 t, ρ 滿足

$$R(y,t) \leq \frac{A}{\rho^2}, \quad \forall y \in B_\rho(x)$$

我們有如下估計

$$inj(x) \geq B\rho$$

其中 $inj(x)$ = injectivity radius, $\forall x \in M$.

由此引理, 將可用來證明註 D(1) 的猜測問題乃是在此引理中, 我們必須對曲率做適度限制。

5. Open 問題

從以上討論以及註 D(1), 第四節應用 (2), 知如果我們能得到類似如下猜測, 則整個 Hamilton's program 將可得到滿意的答案。

Conjecture: 考慮$(M^3, g_{ij}(t))$上的 Ricci flow, 在任何初值度量$g_{ij}(0)$之下, 我們也有某種 Harnack-type 的估計!

例子: 在二維的例子, Hamilton 和 Yau 找到了類似的 Harnack-type 估計。

參考資料

[A] M. Anderson, *Scalar curvature and geometrization conjectures for 3-manifolds*, in Comparison Geometry, MSRI Publications, **30**(1997), 49-82, Cambridge Univ. Press.

[Ha1] R. S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. **17**(1982), 255-306.

[Ha2] R. S. Hamilton, *Four-manifolds with positive curvature operator*, J. Differential Geom. **24**(1986), 153-179.

[Ha3] R. S. Hamilton, *The Ricci flow on surfaces*, Contemporary Mathematics **71**(1988), 237-261.

[Ha4] R. S. Hamilton, *An isoperimetric estimate for the Ricci flow on surfaces*, in Modern Methods in Complex Analysis, The Princeton conference in honor of Gunning and Kohn, pp. 191-200, ed. T. Bloom, etal., Annals of Math. Studies **137**(1995), Princeton Univ. Press.

[Ha5] R. S. Hamiltion, *Non-singular solutions of the Ricci flow on three manifolds*, Comm. Anal. Geom. (1998) to appear.

[Ha6] R. S. Hamiltion, *Four-manifolds with positive isotropic curvature*, Comm. Anal. Geom. **5**(1997), 1-92.

[Ha7] R. S. Hamiltion, *The Harnack estimate for the Ricci flow*, J. Differential Geom. **37**(1993), 225-243.

[Ha8] R. S. Hamilton, *Eternal solutions to the Ricci flow*, J. Differential Geom. **38**(1993), 1-11.

[Ha9]R. S. Hamilton, *Formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in Diff. Geom. **2**(1995), 7-136, International Press, Boston.

—本文作者任教於清華大學數學系—

廣義相對論中的量子效應
——從幾何的觀點出發——

吳志揚

在這篇短文中, 我們將試著從微分幾何的觀點出發來探討廣義相對論中的量子效應。量子力學 (Quantum Mechanics) 與相對論是公認二十世紀中最革命性及重要的物理理論。它們大約都在二十世紀初葉開始發達, 且至今都經得起各種實驗及觀測的考驗的。從二十世紀中葉開始, 嘗試將這兩個不同領域整合起來, 一直都是很多物理學家及數學家的夢想。在本文中, 我們將介紹筆者利用幾何的觀點所得到的一點研究心得, 以供大家作個參考。

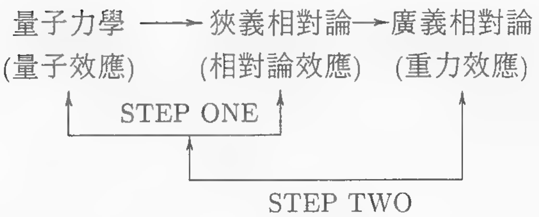
不容易的事, 做起來特別有意思也深具挑戰性。要統合量子力學及相對論即是件不容易的事。歸納其原因在於他們的效應相較於古典力學並不顯著, 而在一些重要的情況, 他們的效應, 才扮演主要的角色。在量子力學方面, 蒲郎克 (Planck) 常數 $\hbar$ 的值很小, 在 cgs 的單位系統中, 大約是 10^{-27} 的級數。就某種意義來說, 這個量是描述量子效應顯著與否的一個參考指標。也就是說, 量子力學與古典力學在較大的尺度下是差別不太大的。不過, 雖是如此, 在哲學觀上, 它們卻是迥然不同的。這是因爲機率的概念在量子力學中, 扮演重要的角色。這觀念也導致了電子顯微鏡的發明。隨機的概念可說是量子力學中最迷人, 也最難掌握的一個特徵。

在廣義相對論中, 愛因斯坦 (Einstein) 利用時空 (spacetime) 一體的概念, 成功而有效地統合了時間、空間及重力。簡單地說, 它包涵了兩個主要的效應: 相對論效應 (Special relativity effect) 及重力效應 (gravitational effect)。只考慮相對論效應是屬於狹義相對論的範籌, 而重力效應即是導自於時光彎曲的效應, 亦即重力效應就是彎曲空間效應。

因此, 要統合量子力學及廣義相對論, 就必須有效地結合這三種不同效應: 量子效應、相對論效應及重力效應, 物理學家嘗試走的路線是先整合量子效應及相對論效應, 再進一步統合重力效應。到目前爲止, 第一步在三、四十年代即已獲得不錯的成果。例如: Dirac Equation 及 Klein-Gordon Equation, 即是在狹義相對論中, 描述具有自旋或無自旋粒子的波動方程式。然而第二

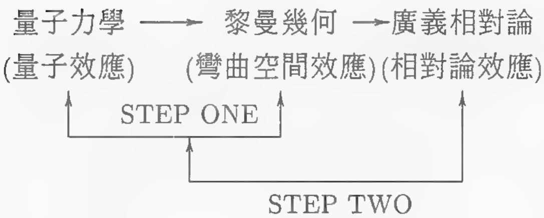
步的工作, 卻未有令人滿意的結果, 物理學家走的路線可以下圖概要地表示出來。

物理路線 (Physical approach):



接下來, 我們想利用幾何的觀點, 提出一個新的路線, 我們稱之爲幾何路線。

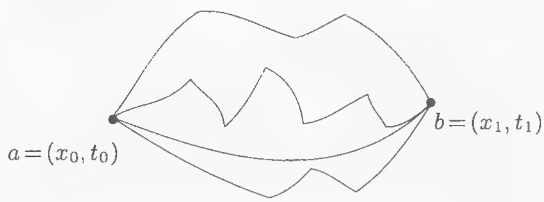
幾何路線 (Geometric Approach):



特別值得一提的是, 幾何路線與物理路線, 最大的不同處在於我們先嘗試統合量子效應及彎曲空間效應 (重力效應), 再進一步整合相對論效應。爲什麼, 我們可以相信用幾何的觀點來嘗試統合量子力學與廣義相對論是可行而有效的呢? 以下, 我們先試著點出其實這兩個理論就某種面向來看, 都是非常具有幾何特性的。

首先, 廣義相對論, 就某種意義來說, 就是一種幾何學, 因爲愛因斯坦即是利用彎曲的時空 (spacetime) 將重力效應引進到相對論的理論中。也就是上面已經提起的, 重力效應是導自於時空的彎曲空間效應 (curved-space effect)。這個認識也提供了我們足夠的線索及勇氣, 讓我們能大膽地提出幾何路線的新觀點。

至於說量子力學也是具有 幾何面向的, 可能對一些物理學家來說, 可能略顯唐突。因爲, 現今一般的物理教科書中, 用來描述量子力學的方式, 是採用海森堡 (Heisenberg) 的算子力學 (matrix mechanics) 或者是薛丁格 (Schrödinger) 的波動力學 (wave mechanics)。然而在二十世紀中葉, 費因曼 (Feynman) 延續了狄拉克 (Dirac) 的概念而提出了路徑積分 (path integrals) 的理論來說明量子力學, 這種觀點的重要性到七、八十年代以後, 已漸爲物理學家所肯定及重視。利用路徑積分的觀點來解釋量子現象, 就深具幾何直觀了。這是因爲它描述一個粒子從某處到達它處是需要考慮所有可能的軌跡的:



同樣地, 我們也可以利用物理–幾何的兩面性, 來給出相對論的一種描述 (Formulation):

(GRI): 幾何面向 (Geometric Component):

時空是由愛因斯坦方程 (Einstein's Field Equation) 決定:

$$R_{ij}-\frac{R}{2}g_{ij}=-\frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} \quad (1)$$

其中 R_{ij} 是度量張量 g_{ij} 的 Ricci 曲率, R是純量曲率, c 是光速, G是 重力常數而 T_{ij} 是能量–動量張量。

(GRII): 物理面向 (Physical Component):

粒子在時空中的運動, 由測地方程式 (geodesic equation) 決定:

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=0 \quad (2)$$

如果我們將 (1) 取平均 (Trace) 的話, 我們得到

$$R=\sum_i \frac{8\pi G}{C^4}T_i^i \quad (3)$$

所以純量曲率是由能量–動量在時空的分配所決定的。

廣義相對論 (GRI) 與 (GRII) 是一種半馬赫 (semi-Machian) 的理論, 因爲 (GRI) 融入了 T_{ij} 而 GR(II)–(2) 就不受 T_{ij} 的影響了。

我們認爲從馬赫的哲學觀出發, 從量子力量來看, 若廣義相對論要加入量子效應的話, 我們就必須將非馬赫部份的 GR(II)–(2) 做以下的修正:

(GR-II') 量子效應的物理面向 (Physical Component with Quantum effect):

對沒有質量 (massless) 粒子, 如光子等, 其運動遵守測地方程式:

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=0 \quad (4)$$

但對具有靜止質量 m_0 的物質, 其運動遵守量子–測地方程式 (quantum-geodesic equation):

$$m_0\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=\frac{\hbar^2}{12m_0}\nabla R \quad (5)$$

其中 ∇R 表示純量曲率的梯度向量 (gradient)。

相信各位一定好奇爲什麼我們相信量子–測地方程式應該出現在相對論裡呢, 以及我們是如何得到它, 特別是 $\frac{\hbar^2}{12m_0}\nabla R$ 這一項呢?

要清楚說明這一些疑問, 我們必須回到費因曼的路徑積分觀點。

考慮彎曲流形 (Curved spaces) 的薛丁格方程式:

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta\Phi \quad (6)$$

若 $K(a,b)$ 表示此方程式 (6) 的基本解。我們可以利用微分幾何的方法及理論, 證明 $K(a,b)$ 可表成如下的路徑積分:

$$K(a,b)=\int_a^b e^{\frac{i}{\hbar}S_Q[\gamma]}D\gamma \quad (7)$$

其中對應於一條從 a 到 b 的路徑 γ 的量子作用是

$$S_Q[\gamma]=\int_{t_0}^{t_1}\frac{m_0}{2}<\gamma'(s),\gamma'(s)> +\frac{\hbar^2}{12m_0}R(\gamma(s))ds \quad (8)$$

狄拉克及費因曼注意到一件相當重要的事實是: 古典的作用 $S[\gamma]$ 在路徑積分中, 扮演了極重要的角色, 即在 [Wu1] 中, 我們所稱的古典–量子對偶律。

古典–量子對偶律: 在空間中, 牛頓運動方程式隱含在薛丁格方程式基本解的路徑積分表示式中:

$$F=m_0\gamma''(t)\Longleftrightarrow K(a,b)=\int_a^b e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}D\gamma \tag{9}$$

根據這古典–量子對偶律的哲學觀, 我們便可以根據 (7) 及 (8), 找出 (8) 式的 Euler-Lagrange Equation, 並利用相對論的 Principle of Covariance 而成功地得到時空中的量子測地方程式 (6) 了!

其實, 根據量子–測地方程式, 我們也可以進一步得到廣義相對論中的薛丁格方程式 (relativistic wave equation):

$$i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}=-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Box\Phi+V\Phi-\frac{m_0c^2}{2}\Phi \tag{10}$$

因爲要解釋此方程式 (10)'的由來, 將很花篇幅, 我們請有興趣的讀者, 參考拙著 [Wu1], 不過值得特別一提的是, 走我們提出的幾何路徑 (Geometric Approach) 來嘗試統合量子力學及廣義相對論, 也可以讓我們得到有名的愛因斯坦質–能方程式: $E=m_0c^2$。

參考資料

[Di] P. A. M. Dirac, *The Lagrangian in Quantum Mechanics*, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion, Band 3, Heft 1(1933), 64-70.

[Do] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Calrendon Press, Oxford, 1992.

[F] R. P. Feynman, *Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics*, Rev. Med. Pyhs. 20 (1948), 267.

[FH] R. P. Feyman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path integrals*, McGraw-Hill Publishing Company, New York, 1965.

[N] *Feyman integral and the Schrö-dinger equation*, J. Math. Phys. 5(1964), 332-343.

[R] G. Roepstorff, *Path integral app-roach to Quantum Physics*, Springer-Verlag, 1994.

[Wu1] J.-Y. Wu, *Quantum effect in general relativity*, NCCU, Math. Dept. Technical report No. JYW1999-3.

[Wu2] J.-Y. Wu, *Curvature, bounded cohomology and path integrals*, to appear in the Proceedings of ICCM'98, Beijing..

本文作者任教於中正大學數學系

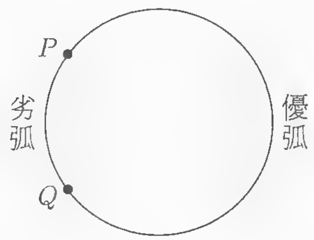
球面上的測地線和一個平面幾何的問題

張海潮

一八五四年, 年僅二十八歲的黎曼, 在七十七歲的高斯面前就職演講「論幾何學之基礎假說」。在這篇演講中, 他解釋了在流形上爲什麼要定出測距的微量元素 ds^2, 並且要「建立一個自一原點出發的測地線或最短曲線系統。」(註一) 用現在的術語來說, 就是利用測量在局部畫出測地線, 並且利用這些測地線所形成的座標來 (至少) 了解局部的幾何。

更具體的說, 以地球表面爲例, 從北極出發, 沿各條經線往南方走, 這些經線就是測地線, 它們走了多長可以緯度 ϕ 表, 走的方向可以經度θ表, 因此 ds^2 可以 $d\phi$ 和 $d\theta$ 表成 $d\phi^2+\sin^2\phi\ d\theta^2$。(註二) 如果我們觀察一個緯圓, 亦即等緯度的一個圓, 它等於是由 ϕ 等於常數所定義的, 因此 $d\phi$爲 0, 此時 ds^2 就變成 $\sin^2\phi d\theta^2$, 這說明了緯圓的周長會因緯度而變; 當 ϕ 是九十度的時候, 它代表赤道, 此時 $\sin\phi$ 等於1, 說明了赤道緯圓的圓周最長。(同註二)。

許多微分幾何的教本都會花點篇幅說明測地線這個名詞並不等價於連結兩點之間的最短曲線, 原因是測地線起源於局部的測量, 如果只管局部, 那測地線確代表兩點之間的最短距離。一旦走遠了就不一定是最短的。比方說, 大家都知道經線是球面上的測地線, 在同一條經線上的兩點, 有兩個方式連結 (圖一)



圖一

左邊的那一段較短稱爲劣弧, 右邊的那一段較長稱爲優弧, 劣弧是最短距離, 但兩個弧都是測地線。

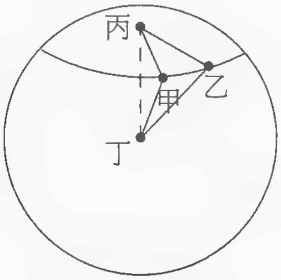
因此曲面上測地線的意義在數學上就乾脆定成是滿足測地線方程式的曲線。我以爲這個定義方程式是伯努利在一六九八年給萊布尼茲的信裡首先提出的。(註三)

這個定義原來是針對在三度空間中的曲面所提出的, 它把測地線定義爲「若將單位切向量微分則不會有曲面上的分量」。直觀來看, 我們可以把一條曲線想像成是質點以單位速度 (即速率爲一) 所走的路徑, 如果它的加速度向量與曲面垂直, 那麼此時質點速度上的改變只是爲了適應地形而爬上爬下, 對距離來說始終是走最經濟的路線; 換句話

說, 因爲加速度的方向即受力的方向, 這個方向和曲面垂直的時候表示質點唯一的受力來自曲面對質點的束縛 (Constraint) 這樣的力不會對質點做功, 質點是處在自由運動的狀態, 自然應該經歷最短的距離。(所以愛因斯坦在廣義相對論裡認爲光走的路徑就是測地線)。

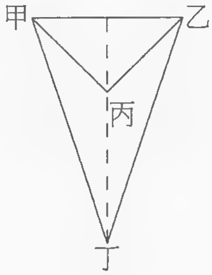
對一些簡單的曲面, 利用這個定義很容易發現測地線。拿球面來說, 我們看看經線, 沿經線畫單位長的切向量, 這些切向量微分以後當然指向經圓的圓心, 也就是球心, 所以和球面垂直, 因此不僅是經線, 只要是大圓 (圓心和球心重合的圓) 都是測地線。可是要看出大圓上的劣弧是連結兩端點的最短曲線其實並不是那麼明顯。雖然我在前段談到伯努利一六九八年的定義方程式時從物理的角度出發說明了這個數學定義的合理性, 但是實際上如果我們硬要在球面上連結甲乙兩點的大圓之劣弧是甲乙兩點間的最短距離 並不那麼容易證明。

讓我們看一看這個問題的一個比較簡單的形式: 假設甲乙兩點在一個緯圓上, 而同時它們也在一個大圓上, 爲什麼緯圓上之劣弧會比大圓上之劣弧長呢? 請看下圖 (圖二, 大圓並未畫出)



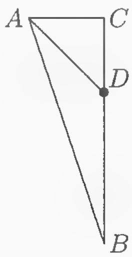
圖二

甲, 乙在緯圓 (圓心爲丙) 上, 又在以丁同時爲球心和圓心的大圓上, 丙圓小半徑短, 因此以甲乙連線段爲軸把丙轉到甲乙丁這個平面上則丙會落在三角形甲乙丁中, 如圖 (圖三)



圖三

圖中有兩個等腰三角形, 一大一小, 現在要證明 $\overline{甲丙}\cdot$(角丙) 大於 $\overline{甲丁}\cdot$角丁, 也就是相應的兩個劣弧之間應有的大小關係。這個證明不難, 可是一定要用微積分, 雖然表面上看來不牽涉到。再變形一下, 看看下圖 (圖四, 可以說是圖三的左半邊),



圖四

直角三角形 ABC, BC 上取一點 D 連 AD, 求證: AB 乘以角 B 小於 AD 乘以角 ADC。親愛的讀者, 這是一個平面幾何的問題嗎? 如果是, 爲什麼不能用平面幾何

的方法來做呢? 有興趣的同行不妨試試。(註四)

註釋:

註一: 黎曼就職演講的英文版見 Spivak 著「微分幾何」第二冊。中文翻譯見中研院出版之「數學傳播」, 民國79年十四卷三期。

註二: 此處在北極時 ϕ 定爲 0 度, 在赤道時 ϕ 定爲九十度。

註三: Morris Kline 所著「數學史」第二十三章第七節。

註四: 有位學生考試的時候想用平面幾何或立體幾何的方法來證明大圓之劣弧與緯圓之劣弧之間的不等式, 未能成功, 我閱卷的時候仔細的想了一下這個「平面幾何」的問題, 是寫本文的主要動機。(編註: 此問題已有徐正梅老師更進一步的討論, 請見本期「地球上兩點間的球面距離」)。

·本文作者任教於台灣大學數學系·

談地球上兩點間的球面距離

徐正梅

地球是人類的老故鄉, 它具備了「陽光、空氣、水」三寶, 孕育了無數的生命。人類的文明在這塊大地上萌芽、滋長、開花 ··· 一代又一代永續不斷地傳承、創新。但是, 您是否明白: 地球的「長相」? 從台北飛往倫敦, 經過那些地區航線較短?

一. 地球是圓形球體?

古代一些有智慧的人, 累積了許多生活上的經驗:

- 太陽從地平線冒出來, 日正當中後又 逐漸在海面上沈落。
- 船隻進港、先見桅燈、後見船身。
- 海、天爲何連成一線?
- 月蝕時月球上的圓形陰影何處來?

他們必也想過: 大地由於「地大」廣無邊際, 難道不是平的, 而是彎曲的?

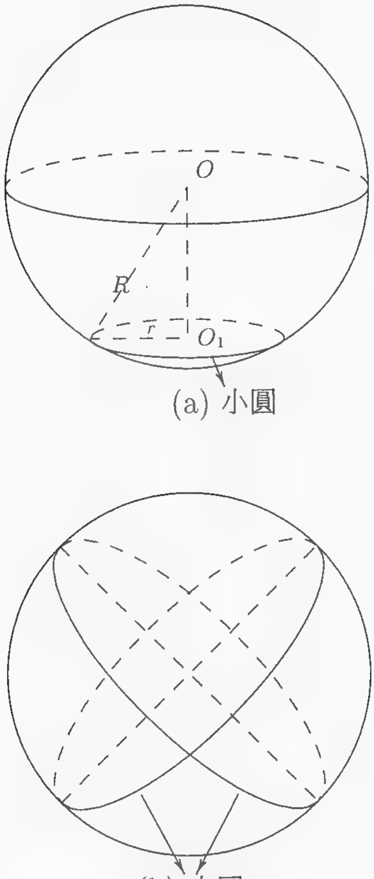
十六世紀初, 波蘭的科學家哥白尼 (N. Copernicus 1473-1543) 提出了「地圓說」, 1492 年哥倫布 (Columbus) 航海西行發現了美洲新大陸, 1522 年麥哲倫 (Magellan) 的環球一周的壯舉更證實了地球是圓的。事實上, 地球在赤道附近的半徑約爲6378公里, 在南、北兩極的半徑約爲6358公里, 二者相差僅20公里, 大約佔6378公里的0.313%, 這個「差距」微不足道。我們把地球縮小成半徑10公分的地球儀, 南、北兩極的半徑約爲9.968公分。所以「地球儀」幾乎是圓形球體, 肉眼實難分辨它是微扁的球體。

二. 經度與緯度

把地球看成一個渾圓球體 (如果不太計較的話), 地球上每一個點的位置是用經度、緯度來確定的。例如台北約位於「東經 121°, 北緯 25°」上。

球面上以通過球心的平面所截出的圓最大, 此種圓叫做 大圓 (大圓的半徑等於球的半徑)。不通過球心的平面所截出的圓都叫 小圓 。如果球的半徑記作 R, 小圓的半徑記作 r, 球心與小圓圓心的距離記作 d (參照圖1) 那麼 R 與 r 滿下列關係:

$$R^2 = r^2 + d^2. \quad (d = \overline{OO_1})$$



(a) 小圓

(b) 大圓

圖1

地球的運動分公轉和自轉。所謂公轉就是地球循橢圓形的軌跡繞太陽運行, 繞行一周約需一年。地球除了公轉外, 它本身也以勻速自轉, 自轉的軸是一條貫穿南、北兩極的直線, 這條直徑叫做 地軸 。

以地軸爲直徑的大圓叫做 經線 (分東經線與西經線), 又稱 子午線 。所有的經線必通過南極和北極。除了南、北極外, 地球上每一個點都恰有一條經線通過, 這條經線是由南、北兩極與該點所決定的平面所截出的大圓。通過英國倫敦市郊 格林威治 天文台的經線 (是一個半圓) 叫做 0° 經線又叫 本初子午線 。其餘各經線的度數就是該經線所在的半平面與 0° 經線的半平面所夾的二面角的角度 (如圖2)。0° 經線以西的經線稱做西經線 (是一個半圓), 其度數取值的範圍是 0° ～ 180°, 0° 經線以東的經線稱做東經線 (是一個半圓), 它的度數也是 0° ～ 180°。圖2的 P 點位在東經 120° 的經線上。東經 180° 和西經 180° 是同一條經線 (半圓) 的度數, 東經 120° 和 西經 60° 則是同一個大圓的東、西兩條經線。

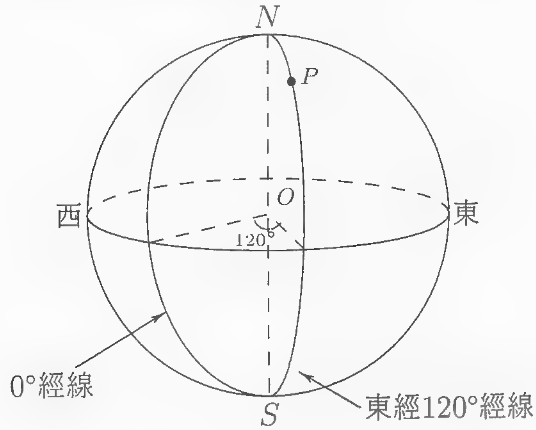


圖2

與地軸垂直的圓叫做 緯線 , 其中的大圓叫做 赤道 , 又叫 0° 緯線。赤道以北的緯線 (都是小圓) 叫做 北緯線 , 赤道以南的緯線 (都是小圓) 叫做 南緯線 (如圖3), 地球上每一點都恰有一條緯線通過 (因爲通過該點且垂直地軸的平面恰有一個), 緯線的度數就是經過緯線上任一點的「球半徑」與「赤道面」所夾的角度, 它們的度數是 0° ～ 90°, 如圖4, A點在北緯 40° 的緯線上, 又在東經 120° 的經線上, 所以我們稱 A點的位置是「東經 120°, 北緯40°」。

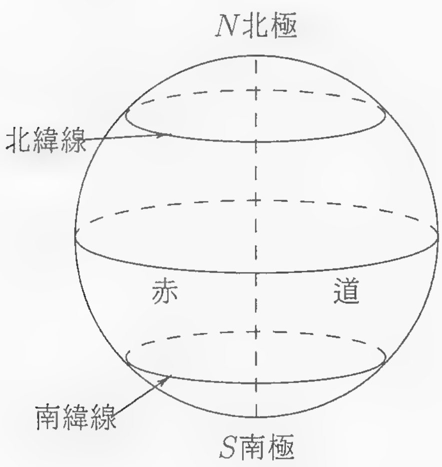


圖3

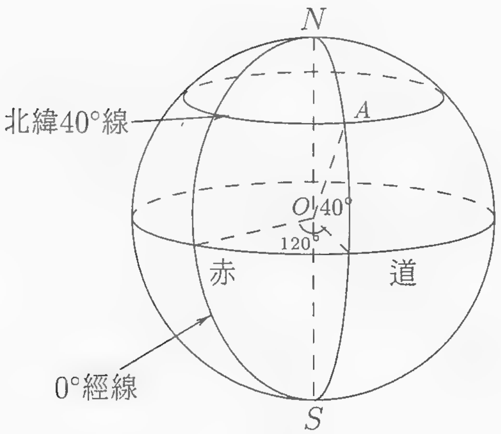


圖4

三. 時差

地球以南、北極的連線爲軸心, 自轉一周所需時間廿四小時, 面向太陽照射的半球爲白天, 背向太陽的半球爲黑夜。天文學家以東經線、西經線劃分時區, 地球的經線每小時轉動 15°, 由於

$$15^\circ \times 24 = 360^\circ$$

所以由 0° 經線起, 每隔 15° 的經線形成一個時區。天文學家將某地的子午線 (經線) 正對著太陽時定義爲該地的「格林威治時間中午12時」。地球由西向東自轉, 所以經線每往東增加 15° , 該地的時間與格林威治時間的「時差」就增加一小時。以台灣位於東經 121° 爲例, 因

$$121^\circ \div 15^\circ \approx 8 \text{ 小時 (約)}$$

故台灣的時間與倫敦市外的格林威治, 有八小時的時差, 當格林威治中午十二時, 同一時間在台灣是晚上八點。

東經 180° 與西經 180° 是一條重疊的經線, 名叫 國際換日線 。這條想像中的經線, 從北極劃過白令海、太平洋、斐濟的 Taveuni 島, 直達南極。從地球儀上審視, 此條換日線的左側 (含亞洲的那一側) 比它的右側 (含美洲的那一側) 提早了一天, 比如說, 當國際換日線正對太陽時, 其左側是一月二日的中午十二點, 右側就整整晚了一天, 正是一月一日的中午。

四. 球面上兩點間的最短路徑

從台北飛往倫敦那一條路徑最短? 用細線去量地球儀, 您將發現下列路徑比較短

台北 → 鄭州 → 包頭 → 阿爾泰山 → 烏拉山脈 → 列寧格勒 → 哥本哈根 → 倫敦。

因爲它是通過台北、 倫敦兩地的大圓路徑 (近似)。

球面上通過 A、B 兩點之許多路徑中, 顯然以 共平面 的路徑較近, 而共平面的路

徑就是通過 A、B 兩點之各種不同半徑的圓弧, 這些圓弧又以

通過A、B 兩點之大圓的劣弧為最短。

我們應用三角函數的基礎知識來證明這一重要事實, 先給出兩個引理。

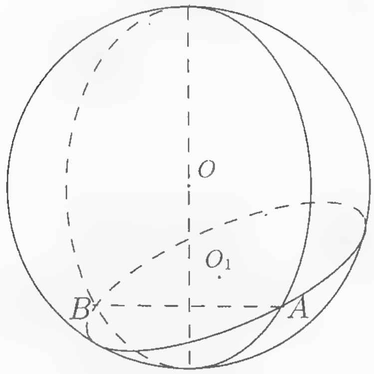


圖 5

引理1. 設 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 則 $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$。

證明: 如圖6, 單位圓與 x 軸正向交於 $A(1,0)$ 點。點 B 在第一象的單位圓上且 $\angle AOB = \alpha$。點 C 是過 A 點的切線與直線 OB 的交點。

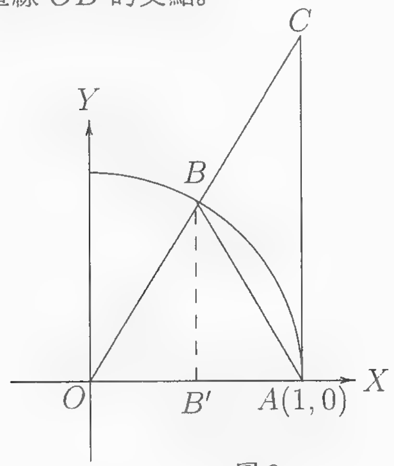


圖 6

由 $\triangle OAB$面積 < 扇形$\overset{\frown}{OAB}$面積 < $\triangle OAC$面積, 得到

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin\alpha < \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\alpha < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\alpha$$
(半徑$\overline{OA} = 1$)

$\therefore\ \sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$。

註: 由圖6 $\sin\alpha = \overline{BB'}$, $\alpha = \overset{\frown}{AB}$(弧長), $\tan\alpha = \overline{AC}$, 即$\overline{BB'} < \overset{\frown}{AB} < \overline{AC}$

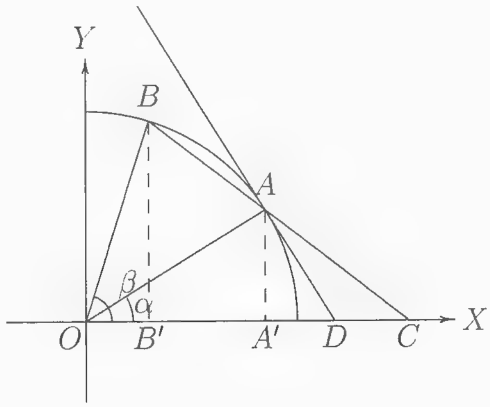


圖 7

引理2. 設 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, 則 $\frac{\sin\beta}{\beta} < \frac{\sin\alpha}{\alpha}$。

證明一: 如圖7, 設 A、B 是單位圓上的兩個點且 $\angle XOA = \alpha$, $\angle XOB = \beta$, 直線 AB 與 x 軸交於 C點, 過 A 點的切線與 x 軸交於 D 點, A'、B' 分別是 A、B 在 x 軸上的正射影, 則

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = 1 + \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} \quad (1)$$

另一方面

$$\overline{BA} < \overset{\frown}{BA}(\text{弧長}) = \beta - \alpha,$$

$$\overline{AC} > \overline{AD} = \tan\alpha > \alpha \quad (2)$$

由 (1) (2) 得

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=1+\frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}<1+\frac{\overparen{BA}}{\overline{AD}}$$
$$<1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}$$

故

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}<\frac{\beta}{\alpha}\quad(\text{或寫成}\ \frac{\sin\beta}{\beta}<\frac{\sin\alpha}{\alpha})$$

證明二: 不等式 $\frac{\sin\beta}{\beta}<\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ 成立之充要條件爲 $\beta\sin\alpha-\alpha\sin\beta>0$。

當 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ 時, 令 $\beta=\alpha+\delta\quad(0<\delta<\frac{\pi}{2})$, 則

$$\begin{aligned}&\beta\sin\alpha-\alpha\sin\beta\\=&(\alpha+\delta)\sin\alpha-\alpha\sin(\alpha+\delta)\\=&(\alpha+\delta)\sin\alpha\\&-\alpha(\sin\alpha\cos\delta+\cos\alpha\sin\delta)\\>&(\alpha+\delta)\sin\alpha-\alpha(\sin\alpha+\delta\cos\alpha)\\&(\because 0<\sin\delta<\delta,0<\cos\delta<1)\\=&\delta(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)\\=&(\delta\cos\alpha)(\tan\alpha-\alpha)>0\end{aligned}$$

$\therefore\beta\sin\alpha-\alpha\sin\beta>0$ 即 $\frac{\sin\beta}{\beta}<\frac{\sin\alpha}{\alpha}$。

證明三: 考慮函數

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}\quad(0<x<\frac{\pi}{2})$$

之遞增、遞減。

$f'(x)=\frac{x\cos x-1\cdot\sin x}{x^2}=\frac{(\cos x)(x-\tan x)}{x^2}<0$ (因 $0<x<\tan x$), 故函數 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在開區間 $(0,\frac{\pi}{2})$ 內是嚴格遞減。當 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ 時, 恆有 $f(\alpha)>f(\beta)$ 即 $\frac{\sin\beta}{\beta}<\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ (或寫成 $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}<\frac{\beta}{\alpha}$)。

現在我們在引理1、引理2的基礎上來證明下面定理:

定理: 通過球面上兩點間的許多圓弧中, 以「大圓的劣弧」爲最短。

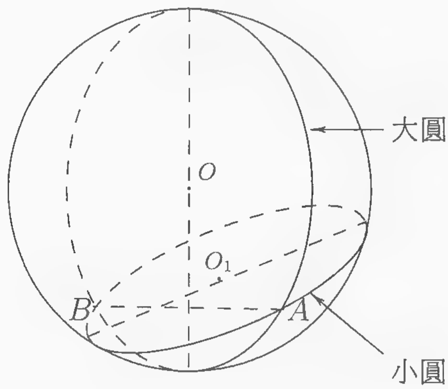


圖8

證明: 如圖8, 通過球面上 A、B 兩點之大圓 O 的劣弧長記作 S, 過 A、B 兩點之小圓 O_1 的劣弧長記作 S_1, 並且令 $R=\overline{OA}=\overline{OB}$ (球的半徑), $r=\overline{O_1A}=\overline{O_1B}$ (小圓的半徑), $\angle AOB=2\alpha$, $\angle AO_1B=2\beta$, 則由圖9得

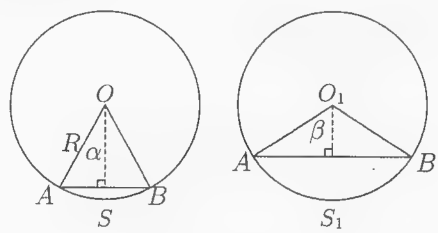


圖9

$$R\sin\alpha=\frac{1}{2}(\overline{AB})=r\sin\beta$$

故

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{R}{r}\tag{1}$$

由 $R > r$ 及 (1) 式知 $\sin\alpha < \sin\beta$ 即 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ ($\overparen{AB}$ 爲劣弧 ,$\angle AO_1B = 2\alpha < \pi$)。另一方面, 由引理2知

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} \qquad (2)$$

由 (1), (2) 得

$$\frac{R}{r} < \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow R(2\alpha) < r(2\beta) \Rightarrow S < S_1。$$

上面這個定理指出了:

地球上兩點間的最短路徑就是經過此兩點的大圓路徑 (劣弧)。

定義: 通過球面上兩點之大圓 (此大圓唯一存在), 在此兩點間的一段劣弧長叫做這兩點的 球面距離 。

五. 一些具體例子

給定地球上兩點之經、緯度, 我們想求此兩點的球面距離, 假設地球的半徑 $R = 6400$ 公里。

例1: 設地球上 A、B 兩點之位置爲 A 位於「東經 121°、北緯 25°」, B 位於「東經 121°、北緯 55°」, 估計 A、B 間的球面距離 (A、B 之球面距離記作 $S(A,B)$)。

解: 因 $\angle AOB = 55° - 25° = 30° = \frac{\pi}{6}$ (弧度) (圖10), 故 A、B 間的球面距離 $S(A,B) = R\cdot\frac{\pi}{6} \doteqdot 3351$ (公里)。

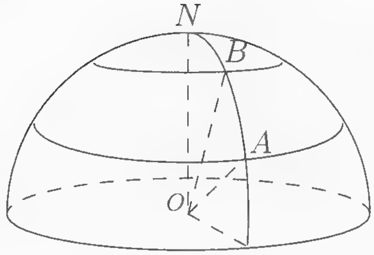


圖10

例2: 假設 A、B 都在北緯 45° 圈上, 且 A 在西經 145°, B 在東經 125°, 求 $S(A,B)$。

解: 設地心爲 O, 北緯 45° 圈的圓心爲 O_1, 我們祇要算出 $\angle AOB$ 之弧度, 那麼 $S(A,B) = R\cdot(\angle AOB$ 的弧度) (圖11) $\triangle AO_1B$ 中有:

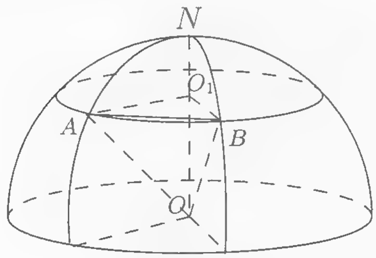


圖11

$$\angle AO_1B = 360° - (145° + 125°) = 90°,$$
$$\angle O_1AB = 45° = \angle O_1BA$$
$$\overline{O_1A} = \overline{O_1B} = R\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}R$$
$$\overline{AB}^2 = \overline{O_1A}^2 + \overline{O_1B}^2 = R^2$$
$$\therefore \overline{AB} = R = \overline{OA} = \overline{OB}。$$

故 $\triangle AOB$ 是正三角形, $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$,
$\therefore S(A,B) = R\cdot\frac{\pi}{3} \doteqdot 6702$ (公里)

從例1、例2中可以看出: 求 $S(A,B)$ 之步驟。

(i) 先依題設條件, 算出弦長 $\overline{AB}$。

(ii) 在 $\triangle AOB$ 中, $\overline{OA}=\overline{OB}=R$ (球半徑), 再由餘弦定理可求出地心 O 對弦 AB 的張角 $\angle AOB$。

(iii) $S(A,B)=R\cdot(\angle AOB$ 弧度)。

例3: 設 A 位於「東經 125°, 北緯 60°」, B 位於「西經 145°, 南緯 30°」試求 $S(A,B)$

解: 如圖12, 設地心爲 O, 北緯 60° 圈, 南緯 30° 圈的圓心分別爲 O_1、O_2, 作直線 AC 垂直於南緯 30° 之截面圓於 C 點, 則四面體 $A-BO_2C$ 的高是 $\overline{AC}=\overline{O_1O_2}$。

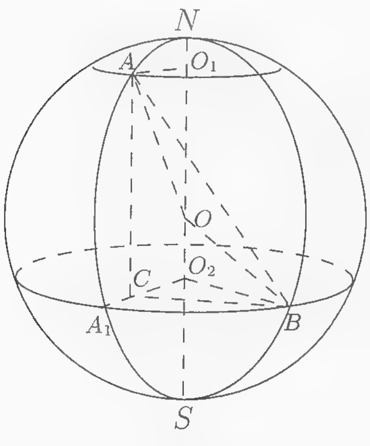


圖12

(i) $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2&=(\overline{O_1O}+\overline{OO_2})^2\\&=\overline{O_1O}^2+\overline{OO_2}^2\\&\quad+2\overline{O_1O}\cdot\overline{OO_2}\\&=(\overline{OA}\cos 30^\circ)^2\\&\quad+(\overline{OB}\sin 30^\circ)^2\\&\quad+2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos 30^\circ\sin 30^\circ\\&=R^2+R^2\sin 60^\circ\\&=(1+\frac{\sqrt{3}}{2})R^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2&=\overline{O_2C}^2+\overline{O_2B}^2\\&=\overline{O_1A}^2+\overline{O_2B}^2\\&=(\overline{OA}\sin 30^\circ)^2\\&\quad+(\overline{OB}\cos 30^\circ)^2\\&=R^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\overline{AB}^2&=((1+\frac{\sqrt{3}}{2})+1)R^2\\&=(2+\frac{\sqrt{3}}{2})R^2\end{aligned}$$

(ii) 設 $\angle AOB=\alpha$, 則

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-\overline{AB}^2}{2\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}}\\&=\frac{-\sqrt{3}}{4}\\&=-0.433012\end{aligned}\qquad(5)$$

故 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, 令 $\alpha=\frac{\pi}{2}+\alpha'(0<\alpha'<\frac{\pi}{2})$ 代入 (1) 得 $\sin\alpha'=0.433012\ldots$ 查三角函數值表: $\alpha'\doteqdot 25^\circ 30'=\frac{51\pi}{360}$ (弧度) $\therefore\alpha=\frac{\pi}{2}+\frac{51\pi}{360}=\frac{77\pi}{120}$。

(iii) $S(A,B)=R\cdot\alpha=6400\times\frac{77\pi}{120}\doteqdot 12901.5$ (公里)。

六. 結語

地球上通過兩點的最短路徑, 天文學家稱之爲 測地線 。多年來筆者任教的一些資

優生都提問過:「測地線是最短路徑」的證明問題。當然, 用積分求弧長的方法對高中生而言少了一份「親切感」卻多了三分迷惑。筆者通常先用平面圖形 (參見圖13) 做直觀的解說:

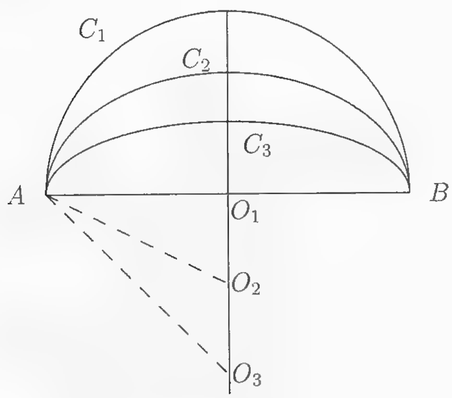


圖13

以 $O_i(i=1,2,3)$ 爲圓心, 在同一平面上作通過 A、B 兩點的劣弧, 易見, 隨半徑 $\overline{O_1A}$, $\overline{O_2A}$, $\overline{O_3A}$ 逐漸增長, 它所對應的劣弧長 C_1, C_2, C_3 亦愈來愈短, 並逐漸趨近線段 AB 的長。所以

兩點間的各種劣弧中, 半徑愈大的, 其對應的弧長愈短。

而球面上所有通過 A、B 兩點的劣弧, 都可以繞弦 AB 旋轉到大圓所在的同一平面上 (此大圓由 A、B、球心三點所確定), 問題就變成圖13的情形了。這種說明對一般的高中生有一分「眞實感」, 但對數學資優生總覺得不夠嚴謹, 乃用初等幾何及三角知識 (高中生可以理解的) 寫了這篇短文, 雅俗共賞, 也許對擔任資優班的數學教師有一些助益。本文的關鍵在於「引理2」, 因此筆者嘗試用三種方式去論證: (證一) 是較直觀的幾何法, (證二) 是用三角知識進行邏輯推理, (證三) 是從函數的高觀點證明 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 是遞減 (用到微分, 高三學生可以理解)。

三月廿日 (星期六) 上午, 中央研究院數學研究所葉永南教授, 邀請了湖北武漢市武鋼三中的數學教師錢展望先生到建國高中演講, 參與座談的除了本校部分師生外, 尙有北一女、師大附中的數學同仁。會後葉教授私下懇請中學老師對「數學傳播」多賜稿。筆者先拋磚, 並寄望中學數學教師將您的數學心得, 研究成果透過「數學傳播」, 與大家分享。

—本文作者任教於台北市建國中學—

從"數學與諾貝爾獎"談起

陳省身

讀"傳播"第21卷第四期黃文璋先生的大作油然有感。簡述於下, 供大家一笑。

1. 為什麼數學沒有諾貝爾獎

理由是很簡單的; 諾獎獎勵對人類幸福有貢獻的人。所以牠包括和平、醫學和文學。設獎者高瞻遠矚, 知道物理、化學將有大發展, 是一個不得了的先見。初獎在1901年。第一個得物理獎的是 Röntgen, 因爲他的 X 光的發現。

數學不可能有這樣的貢獻。數學的作用是間接的; 但是沒有複數, 就沒有電磁學; 沒有黎曼幾何, 就沒有廣義相對論; 沒有纖維叢的幾何, 就沒有規範場論; $\cdots$。物質現象的深刻研究, 與高深數學有密切的聯繫, 實在是學問上一個神秘的現象。

科學需要實驗。但實驗不能絕對精確。如有數學理論, 則全靠推論, 就完全正確了。這是科學不能離開數學的原因。許多科學的基本觀念, 往往需要數學觀念來表示。所以數學家有飯吃了, 但不能得諾貝爾獎, 是自然的。

2. 沒有諾貝爾獎是幸事

數學是一門偉大的學問。牠的發展能同其他科學聯繫, 是人類思想的奇蹟。

數學的一個特點, 是有許多簡單而困難的 問題。這些問題使人廢寢忘食, 多日或經年不決。但一旦發現了光明, 其快樂是不可形容的。試舉三例:

例一、Fermat 的"最後定理", 論方程式

$$x^n + y^n = z^n,$$

其中 $n > 0, x, y, z$ 都是整數。熟知當 $n = 2$ 時, 此方程式有無數個解。但是 Fermat 說, 當 $n \geq 3$, 此方程無解, 除非 $x = y = z = 0$。這樣簡單的問題, 幾百年未決。最近 Princeton 的 Andrew Wiles 教授證明了, 可謂數學史上的一大事。

例二、球裝問題 (Kepler 問題) n 維空間內有同一直徑的球, 如何能裝得最緊? 一個更簡單的問題: 有這樣一球, 最多能放多少球同牠相切? 在 $n = 2$ 時球是圓面, 這數顯然是6 (請讀者作圖自明)。但在三維空間, 不難證明可放12個球。還剩不少空間, 可是第13球放不進。當年對此問題, Newton 同

Gregory 有過爭論。事實上第13個球是放不進的。最近的簡單證明, 請看項武義的工作。

例三、方程式

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

其中 a_i 是實數或複數, 必有複數解。

以上都是重要的問題。例三叫做代數的基本定理。

數學上這樣簡單而困人的問題很多。生活其中, 樂趣無窮。這是一片安靜的天空; 沒有大獎, 也是一個平等的世界。整個說來, 諾貝爾獎不來, 我覺是數學的幸事。

—本文作者爲中央研究院院士, 是本世紀最偉大的幾何學家之一—

周元燊院士演講——

我所知道的中央研究院數學所(自1948至1980年)

時間：民國八十七年九月廿六日

(中央研究院七十周年院慶)

地點：中央研究院數學研究所

記錄：謝天長

各位女士、各位先生，我知道中央研究院數學所是我讀大學的時候。我是三十八年春天大學畢業，三十七年申請工作的時候，申請去新疆或東北，但都沒辦法去，就申請到台灣。當初數學所在上海，他們準備搬台灣，我就申請中央研究院數學所，結果不行，因爲要搬家連自己的人都容納不了，那裡還用新人。我就申請台灣大學，結果我比數學所早來台灣。我是三十八年二月二十八日到台灣，再過一天，三月一號，到台灣就須要入境證，我是沒有入境證而到台灣的。數學所是三十八年春天大概是三月或四月從上海搬來的，主要因爲上海到台灣的船很難找，那時很不幸還有一艘船沈了，死了很多人。中央研究院數學所搬來的時候，另外一個所也搬來了——史語所，我一定要將數學所擺在前面，史語所擺在後面。所以我講三十八年數學所搬來台灣的時候，中央研究院也有另外一個所搬來台灣，那就是史語所。因爲中央研究院大家覺得搬來台灣的時候只有一個所，我跟吳大猷先生講過很多次，當時其實有兩個所，數學所所長是姜立夫先生，史語所所長是傅斯年先生，以後傅斯年先生當了台大的校長，姜立夫先生來台灣沒多久就回去了。

數學所是民國三十年在西南聯大開始籌備的，爲什麼在西南聯大籌備呢？因爲當初的研究所都跟大學有關係，像地質氣象研究所是在浙江大學，所長竺可楨先生；像物理所在中央大學。當初是一個所放在一個大學裡面，數學所是放在西南聯大，由姜立夫先生籌備，其實實際負責的人是陳省身先生，陳省身先生是姜立夫先生的學生，姜立夫先生是南開大學數學系主任，陳省身先生是南開大學畢業的，以後到歐洲讀書回來就在南開教書。西南聯大是由清華、北大與南開三所大學所組成，三十四年中日戰爭打完，三

十六年數學所在上海正式成立, 姜立夫先生是所長, 但是姜立夫是南開大學教授, 所以他不在上海, 在上海辦所務的人是陳省身先生, 陳省身代理所長, 其實在籌備的時候也是陳省身先生在辦, 所以當初的印象是數學所是陳省身在辦的, 數學所是陳省身先生的所, 這個數學所有什麼傳統、習慣, 都是陳省身先生的傳統、習慣, 爲什麼要這麼講? 因爲這一點大家都同意, 二十世紀中國數學發展的很好, 如果中國人要找一個代表的話, 那當然是陳省身, 陳省身先生創辦數學所, 所以他跟數學所的情感很深很深。

當初數學所搬來台灣的時候在楊梅, 不在台北, 在火車站附近租了個倉庫, 沒多久, 約兩、三個月的時間, 數學所就搬到台北來, 借用台大數學系一個研究室, 拿書架擺起來, 把研究室分成兩半, 一半是數學所, 一半是數學系的研究室。我自己是台大助教就用另外一半。這個時候數學所有姜立夫先生, 他是所長; 有胡世楨先生、王憲鐘先生, 是研究員; 有廖山濤、楊忠道先生, 是助理研究員。他們除了姜立夫先生外, 胡世楨原本是副研究員, 因爲搬家, 搬到台灣來後, 每人升一等, 楊忠道原本是助理員變成助理研究員, 助理員相當於助教, 助理研究員相當於講師, 所以算助教升講師, 他們是到台灣升的。台灣那時候的數學水準比較低。當時台灣數學界有那些人呢? 我想想看, 台灣大學有沈璿, 他是系主任, 在日本讀天文的, 沒有教授, 有兩個副教授施拱星與許振榮先生, 講師有項黼宸先生, 還有一個助教是我自己, 另外就沒有了。師範大學有管公度先生, 還有李新民先生, 然後是朱辛。想想看台灣那時沒幾個讀數學的人, 胡世楨與王憲鐘是1947年英國愛丁堡大學博士, 他們數學研究皆做得很好, 到台灣時, 他們的文章都在十篇以上, 他們絕對有資格當教授, 姜立夫先生是中國教育家, 數學水準很高, 當時數學所還有一個管理員叫吳善擇, 人很能幹, 還有一個工友徐之勇先生。

數學所搬來時, 人來了, 設備沒有來, 什麼打字機, 計算機都沒有, 我想上海一定有。但是沒搬來, 搬了什麼? 搬了四千本書, 把書都搬來了, 數學所的書好得不得了。姜立夫先生愛書如命, 他搬書的時候, 他說:「可能會沒有研究員, 書一定要有, 因爲書現在有了, 人家才會來讀。有書才會有人, 有人沒有書, 有人也是空的。」我記得數學所有一套雜誌 Acta Mathematica 這套雜誌有一百多年。現在出版的書都好買, 以前的書很難買, 絕版的書怎麼買法? 那時歐洲打戰, 打完了, 到德國登報買書, 就把 Acta Mathematica 買來了。當初經費有限, 到台灣也是, 他精打細算, 通常書不買, 買的都是好書, 而且都是他親自挑選的。譬如說, 假如有一本好書, 隨便舉個例子像 Hydrodynamics, 假如數學所現在沒人做這方面, 若現在不買, 二十年以後請了個做 Hydrodynamics 的人怎麼辦, 那時就買不到了。所以人可以沒有, 但書卻一定要買, 這是姜立夫先生的想法, 他是一位了不起的教育家。

我覺得數學所從上海搬到台灣, 在人的方面, 給台灣數學增加一倍的人力。1950年胡世禎先生到美國 Tulane 大學, 後來他到 Michigan, 現在在 UCLA。胡世禎寫了很多

很好的書, 王憲鐘先生1952年才去美國, 先到 University of Alabama, 後到 Northwestern, 最後到 Cornell 大學。廖山濤是北大學生, 他頭腦好得不得了, 但是沒有畢業, 1950年去芝加哥大學, 在美國讀博士一定要大學畢業。好像是胡適先生以前北大校長身份寫了一封信, 他才在1952年拿到芝加哥大學數學博士。1954年回北大任教, 選上科學院院士, 現在去逝了。楊忠道先生當然很了不起, 到美國 Tulane University 讀書, 大家都曉得楊忠道與廖山濤是中國人讀數學前兩個, 拿美國人的獎學金, 到美國去讀博士的, 他1952年讀完博士後, 到 Illinois 做博士後兩年, 再到 Institute for Advanced Study 工作了兩年, 共四年, 做的好得不得了。之後找事, 還是從 Assistant professor 從頭做起, 以後在 U.P. 呆下去, 後來 U.P. 辦得很好, 楊先生的貢獻很大。楊忠道是浙大畢業, 總平均大概90分吧, 是浙大很好的畢業生, 畢業後在浙大當助教, 再到研究院當助理員、助理研究員, 然後到 Tulane 讀博士, Illinois博士後, Princeton 再博士後, 再到 U. Penn. 從 Assitant professor 做起, 日子苦得一塌糊塗。所以我講這段話什麼意思, 我們讀數學幾年吃多少苦, 事實上都不夠苦, 你看楊忠道多苦。剛才劉所長給我介紹, 說我在台大當六年助教, 其實只當了五年半, 再當下去, 現在可能還是助教, 那時我已經發表文章了, 登在「日本東北數學雜誌」(Tohoku Mathematical Journal), 那時台大理學院助教升講師至少要等七年, 1953年全理學院只有物理系一位助教升了講師, 那時全理學院有七十位助教。

我覺得那時數學所辦得不錯, 為什麼辦得不錯? 第一只因爲錢用得少, 若用幾千萬或幾億當然辦得不錯, 那麼多錢, 拿錢買人嗎? 它根本沒有錢, 沒錢還能辦事很不容易, 工友徐之勇就是很有名的例子, 他來的時候只會燒茶倒開水。搬來台灣以後, 有四千本書沒人管, 你不能叫楊忠道、廖山濤去管, 更不可能叫姜立夫去管, 只好叫徐之勇去管, 當時他英文不認識。從大陸搬來, 圖書館管理員沒來, 所以卡片沒帶來, 因此四千本書沒有卡片。數學所給我四百塊台幣, 讓我編了一套卡片。所以數學所在台灣的第一套卡片是我做的。雖然我不懂編號, 號碼不會編, 但我照 ABCD· · ·排, 用自己發明的編號。後來到哥倫比亞大學去, 哥大的書也是照 ABCD 排, 因為數學的書很難分類的。有一個笑話: Dubins and Savage 寫了一本書叫 How to gamble if you must, 這是一本很好的統計機率的書, 結果分類分到賭博類。所以我說分類很難, 照 ABCD 排、查書、借書其實蠻方便。還好那時候只有英文書, 沒有中文書, 姜立夫先生收集書, 而且收集好書。所以當初數學所搬到台灣來, 對台灣的貢獻是馬上來了一批好數學家及一批好書。

台灣大學呢? 台灣大學當時很慘, 我是台灣大學助教, 我們沒有數學系圖書館, 所有書都在總圖書館, 總圖書館也沒幾本書, 因爲當初在日本時代的時候, 只有數學教室沒有數學系, 台大數學系是蘇步青先生1947年當理學院院長創辦的, 所以當初數學系沒有什麼書。沈璿先生那時是理學院院長兼數學

系主任。數學系沒有幾個人, 很少人用錢, 他將事務費省下來, 每個月買兩本書。數學所搬到台大, 書一下子多起來了, 一下子有那麼多書可以讀, 所以我說有這兩個貢獻。

民國三十八年春天局勢很不定, 八、九月間姜立夫先生去廣州中山大學。稍晚一些時候, 胡世楨先生也去美國, 當初我們所謂年輕人感覺到讀書沒書讀很苦, 不能去美國, 也不能升等, 非常苦悶。胡世楨先生去了 Tulane University。之後楊忠道申請到 Tulane, 但是沒有路費。這時周鴻經剛剛從廣州來台灣, 擔任中央研究院總幹事, 周鴻經先生曾經擔任過中央大學校長、教育部部長, 此時中央研究院院長是朱家樺先生, 朱家樺先生在黨政方面的地位很高, 我想他當時的地位絕對不亞於前總統府資政蔣彥士先生。因爲姜立夫先生走了, 他就擔任數學所所長, 周先生他自己告訴我, 他覺得他不夠資格當所長, 他沒有博士學位只有碩士學位, 所以他用代理所長, 周先生爲人非常客氣, 他是做 Fourier seriers, 是李新民先生的老師, 我想他們老一派的學者有他們的風範。

1950年, 周鴻經擔任所長時, 廖山濤、楊忠道要去美國, 沒有路費。周鴻經以留職留薪辦法, 補助他們每人700美元, 不然他們美國是去不成的, 所以我覺得數學所有傳承, 他的傳承就在這些地方。

1950以後, 姜立夫先生回去, 周鴻經先生接任所長, 他花了很多心思。當初王憲鐘先生沒有走, 王憲鐘先生沒有結婚, 沒有宿舍, 他住在周鴻經家裡。他是數學所最後到美國去的。當初楊忠道、廖山濤都到美國去, 王憲鐘原本不準備走的, 非常愛國家, 他不想離開台灣, 他如果要走老早就可以走了, 後來不知道是不是跟傅斯年吵架, 傅斯年說乾脆你走好了, 這句話一講, 他就非走不行。

當初研究員在台大都有開課, 姜先生在台大開過課, 但是沒有助教, 當時台大只有我一個助教, 我跟沈先生講:「姜立夫先生在這裡開課, 要不要給他一個助教, 我幫他改題目。」他說:「不好, 我們只有一個助教, 那麼多老師沒有辦法。」姜立夫先生開微積分, 結果用誰當他的助教呢? 幫他改題目呢? 胡世楨、王憲鐘改題目, 以輩分算, 他們是學生的學生, 因爲他們是陳省身的學生, 陳省身是姜立夫的學生。本來台大數學系是蘇步青先生創辦的, 應該受南方學派影響較深, 不過姜立夫先生、王憲忠先生在台大開課, 這就受北方學派影響了, 我想台大數學系以後辦得不錯與這有點關係, 因爲他們把風氣帶來了。譬如當時我遇見姜立夫先生, 我問他:「我是助教, 只有大學畢業。」當初台灣沒有數學研究所, 除了中央研究院數學研究所外, 只有台大數學系及師大數學系, 台大數學系當時是單傳, 每年只畢業一個學生, 沒有研究生。我請教姜立夫先生我該讀那些書。他說 Pure Mathematics 是本好書。姜先生走後, 周鴻經先生來了, 我也去請教周鴻經先生, 周先生是做 Fourier seriers, 我大學也讀 Fourier seriers, 我問他該讀那些書, 他反問我讀過那些書, 我說:「讀過 Zygmund 的 Trigonometry Seriers 半本和 Hardy 的 Pure Mathermatics 全本。」他說: 「已經夠了, 不能再讀了, 趕快讀文章。」當初我是台

大助教也問沈先生同一問題, 他說:「你現在根基還不行, 須再讀兩本書。」我們當助教的, 當時不太聽沈先生的意見。寧願聽周先生的意見。38年、39年台大數學系的教授一大部分是數學所的, 那時台大數學系只有四個教授開課: 沈璿先生、施拱星先生、許振榮先生、項黼宸先生。

人都走了, 周鴻經先生接任所長, 周先生開始慢慢在找人, 大概1954年第一個聘的人, 就把林致平先生聘來當兼任研究員, 他是台中航空研究院的院長, 他有軍人的身份, 任職中將。同時, 請許光燿當助理, 這時候數學所完全沒有別人, 當時數學所寧缺勿爛。我是1954年離開台灣, 以後的情形就不太清楚了。我猜大概過了幾年以後, 這時候請了施拱星先生, 施拱星是1954年回來做兼任研究員, 然後是許振榮先生, 然後李新民先生。找學生, 當然找台大畢業的, 蘇競存來了, 而王九逵先生留在台大當助教, 第二年考取公費到美國去了, 蘇競存先生來了, 之後, 項武忠好像也來了。

周鴻經先生是英國倫敦大學碩士, 是 Hardy 的學生, 因爲他研究做的蠻不錯的, 當時已發表十幾篇文章了, 倫敦大學通知他那時可以拿博士了。周先生那個時候要到英國去領他的博士, 大概是美國一個基金幫助順道到美國, 他就經過美國去領博士學位。1957年, 在經過美國時候, 他先到 Illinois, 在我們那邊住了三天, 再到 Cornell 看李新民先生, 當時李新民先生在 Cornell 做博士論文, 周先生很不幸在 Cornell 去逝了。在 Illinois 住的時候, 他在那看了很多 Illinois 的學生, 其中有一位叫魏傳曾, 讀機械系, 以前他是台灣一家兵工廠的廠長, 然後到 Illinois 讀博士, 他讀冶金方面的。周先生希望他畢業後回台灣, 他說:「中央研究院希望你回去, 當時研究院只有數學所、歷史語言研究所, 你可以到數學所做物理方面的工作, 這一點問題也沒有。」跟他談好了。但是周鴻經先生去逝了, 林致平先生接任所長。

魏先生後來回來了。大家應該知道中鋼, 當初趙耀東先生建立中鋼的時候, 他到 Michigan State 找一個專家就是魏傳曾, 就這樣把他找回來, 在中鋼當副總經理, 負責研究發展, 並成立一個研究所。中鋼是由美國鋼鐵公司幫台灣設計的, 後來, 美國鋼鐵公司還派人到台灣學練鋼, 魏先生幫了很多忙, 中鋼能有今天成就他盡了很多力量。他當時只是研究生, 周鴻經先生那樣中研院總幹事禮聘他回來, 他非常感動。我自己在1970年回台灣的的時候, 我是台大助教出身, 照道理我應該回台灣大學, 後來我到數學所也是因爲受到周鴻經先生當初的感召。

所以我們可以講從1950年到1957年數學所是周鴻經先生的所, 完全沒辦事, 找了一批很好的人, 例如項武忠, 項武義、蘇競存, 蘇競存原本讀物理, 到數學所後, 物理也不讀了, 改讀數學。所以我說讀數學應該有這個氣派, 沒有什麼讀物理不能放在數學所, 我說讀數學不能放在物理所裡面是應該的, 因爲讀物理的人沒有這個度量, 但是物理放在數學所裡頭一點問題也沒有。舉個例子: Institute for Advanced Study 只有數學所, 沒有物理所, 當初愛因斯坦也是在數學所裡面,

我覺得物理所放在數學所裡, 一點關係也沒有。

1958年以後, 周先生去逝, 林致平先生接任所長, 林先生做應用數學的, 做得很好。他的作風完全與周鴻經先生不一樣, 他原本是中將, 完全另一套作風, 到了這個時候, 胡適先生接任中研院院長, 當時省主席是周至柔先生, 他當過參謀總長, 是上將, 林致平先生在軍方時一直跟周至柔先生。當時中興大學是省立, 周至柔先生想把中興大學辦好, 要請好校長, 想請林致平先生當中興大學校長, 林先生覺得中研院數學所不錯, 硬是不肯去, 但周至柔先生一定要他去, 老長官要他去, 他怎麼能不去呢? 最後只好辭掉所長。他是很不願意離開數學所, 但是沒有辦法。

這時候沒有所長, 比較資深應該是劉世超先生, 他是1962年從 Wisconsin 讀博士回來。以數學博士算, 這之前, 有施拱星先生1954年拿博士回來, 最早當然是沈璿, 這個時候數學所沒有正式的所長, 就大家互相代理所長。先由劉世超先生代理所長, 再由許振榮先生代所長, 好像李新民先生也代過一段時間所長, 那個時候數學所資深的研究人員沒有, 數學所除了做研究也不教書的, 那個時候學校有限, 我自己對這段歷史也不清楚。

一直到了1968年的夏天, 王九逵先生在台灣, 陳省身先生在美國, 他們兩個人聯合寫一封信, 給台灣在美國讀數學的人每個人一封信, 要我們塡表, 問我們最近兩、三年是否有可能有休假, 有興趣回台灣半年或一年, 我說我可以, 我1970年在哥大休假, 就塡表回答了。1970年, 劉世超是代所長要到 Wisconsin, 我就代所長。那時趙民德在 AT&T, 我們住得很近, 趙民德是 Berkeley 的統計博士, 是1968年讀完的, 他知道我要回台灣一年, 他就請假, 說:「周先生要回台灣一年, 我也回台灣跟他在一起, 跟他在一起讀書, 學一點東西。」他也回來了。當時有一個數學中心, 人很少, 所有人的聘書不是台大, 就是淸華, 或是中央研究院數學所, 聘書發那, 看你住什麼地方, 那個時候安排宿舍, 他問我宿合要住那一個, 我說:「我不希望住台大, 我寧願住南港, 因爲辦所務的話, 人住台北似乎不太好。」但是趙民德住台北, 我們兩個都是數學所, 他住台北後來就變成台大的人, 因爲你住什麼地方, 當然你在什麼地方上班。回來就我們兩個。

那時候我們有一些助理員、助理研究員, 我記得很淸楚是黃登源, 剛要去美國, 他是師範大學畢業的, 是數學碩士, 他讀分析的, 到 Penn. State, 我問他讀什麼, 他說: 「讀分析。」我跟他說:「分析沒什麼好讀, 改行。」問他到 Purdue 去讀統計可不可以? 我說:「我跟 Purdue 統計系系主任 Gupta 講一聲。分析不好讀, 讀分析的人很多, 台灣沒人讀統計, 你爲什麼不讀統計。」黃登源現在統計做的不錯, 是輔仁大學統計所所長。

我剛回來不太久, 顏啓麟就回來了, 他在美國讀博士很快, 大概兩年就回來了, 他應該是劉世超當所長送出去的。剛好我們現在有兩個人, 多了一個人就可以做很多很多事情了, 當初我講台灣的數學家, 我知道的有施拱星先生、賴東昇先生、許振榮先生、繆

龍驥先生, 都是台大的, 淸華我知道的是李新民先生、李宗元先生、謝聰智先生, 好像此外就沒有人了, 當然我們數學所還有劉世超先生, 剛從日本回來的葉能哲先生在淡江, 他現在是淡水工商學院的校長。大概就這幾個人, 不過人少就好辦事, 大概就在這一年回來的人很多, 有蘇競存、有項武義等, 一共有八個, 國內大概也只有七、八博士, 大伙一天到晚在一起, 項武義那時編高中數學實驗教材, 忙得不得了。就覺得那時候我們有很多很多事情可以做, 從來不做研究的, 專門做亂七八糟的事情。

當時台灣 Probability 的課, 都屬於比較老一點的, 都不是新的觀念、新的方法, 也就是說跟測度論沒有關係。當時台灣沒有人能開這門課, 也沒有一個人懂近代的統計, 我就跟淸華的教授謝聰智 (他也是從 Purdue 回來的) 及趙民德商量, 說在南港這邊開三門課: 一門統計課, 一門測度論, 一門機率論, 全部用中文, 來培訓一批師資。

另外行政院主計處要成立電子資訊中心, 主管台灣的電腦業務, 由李克昌先生負責, 他是軍人, 是上校。1957年我曾在 Illinois 選修過一門電腦程式設計課, 同班有電機系劉兆寧先生, 他1957年 Illinois 得博士後, 就參加 IBM 研究中心, 從事電腦研究。現在他從 IBM 退休回來, 負責南港軟體園區開發工作。我與李克昌先生談後, 便邀請他由 IBM 來數學所籌劃國內電腦發展事宜。大家要知道他從 IBM 回來, 那年要留職停薪, 一年不加薪水, 若一年加一千塊美金, 那三十年就是三萬美金了, 不過他還是回來了。當初待遇是一個月二百塊美金, 也就是八千塊台幣, 我們希望 IBM 能夠補助, 現在大概不行, 因爲那時候台灣窮, 大家都知道, 我就寫了一封信給 IBM:「我們請貴公司劉兆寧博士幫助我們發展電腦, 但是我們待遇很差, 你們有沒有辦法幫一點忙。」好像他們發了四分之一的薪水, 所以我說 IBM 這公司有時候也很大方, 他就這樣回來了。當初我們幾個人, 還有四個助理員, 我們開始訓練用電腦的人, 我們自己當然沒辦法教, 於是請交通部電信研究所的人教, 電信研究所有 Computer, 我們就把人送到他們那裡訓練三個月, 他們那裡管吃管住, 我想這一段劉豐哲先生知道蠻淸楚的, 因爲這是他經辦的。我們第二年開始是劉兆寧回來的時候, 劉兆寧先生推動 Computer 發展, 劉豐哲先生代理所務, 這時就開始每一個月開一次會, 那個時候中央研究院電腦研究就在數學所, 現在數學所已經退居二線, 功成名就了。

當初我們是推動電腦的, 稍後在統計方面也訓練一批人, 同時我們把人送出去, 拚命求人去讀統計。在這以前, 台灣讀統計的人並不多, 讀電腦的人也不多, 我們覺得在數學系讀數學的人, 不一定要當數學家, 當統計學家不錯, 當電腦學家也不錯, 有很多出路。

當初有很多人批評說, 數學所什麼都做, 就是不做數學, 我們是這樣回答的:「我們既然沒有做數學, 我們也沒有花錢。」我是1970年回來的, 當初數學所經費是65萬台幣, 等於一萬六千美金, 如果在美國做事的話, 一年薪水, 至少一萬六, 這就是數學所的經費, 在這個經費下, 數學所還是辦了很多事情。那

時候一個教授一個月拿一百塊美金, 國科會再補助一百塊, 一共加起來二百塊美金, 共八千塊台幣。從那個時候我們開始找人, 開始增加名額, 我們那時的助理員、助理研究員是終身職, 是沒有任期的, 而研究員、副研究員是有任期的。是數學所建議把它改了。另外, 你看我們這棟房子, 房子裡面有廁所, 有洗手間, 當時你到台灣其他公家機關, 洗手間一定在外面, 你看台大二號館上廁所要到外面。但是很多人說, 洗手間在房子內, 房子會臭得不得了。還有當時洗手間沒有衛生紙, 上洗手間要自己帶衛生紙, 我們就開始在洗手間放衛生紙。還有辦公室裝中央系統冷氣, 當初很多人講電費很貴我們裝不起的, 但是我們還是裝了中央系統冷氣, 以後很多房子都照抄。有了中央系統冷氣, 有了洗手間, 因爲就是沒人, 也可以聯合別人, 我們聯合交通大學、台灣大學一同做事。台灣大學我去過很多次, 我們希望台灣大學數學系對電腦有興趣, 但是台大數學系沒有興趣, 我不知跟繆龍驥先生打過多少交道, 他說他很想參加, 但卻不成。以後只有找電機系, 把許照拖下水。

我沒有辦法一直呆在台灣, 既然沒有辦法回來怎麼辦呢? 我就跟錢院長講, 我所長絕對是掛名, 掛名沒關係, 反正不做事, 也絕對不要經費, 在美國打電話回來也不報帳, 我事情沒有做, 錢也沒拿, 每次回來就起薪, 出國就停薪, 一個月薪水是四千塊, 從來不付旅費, 工作就請劉豐哲先生代理, 然後請黃武雄先生代理, 中研院總幹事高化臣先生就問我, 你的代所長爲何常在換, 找一個人就固定了, 我說每個人都有機會, 總是一個人幹, 你就把他毀掉了, 一個人六年一代, 他研究就完了! 數學所那時人很少, 對外不能做很多項目, 可是在聯繫方面卻作了很多工作。當初我們的圖書館是二十四小時開放的, 任何人可以到圖書館看書、借書, 我想我們是做到了, 這是1973年的事。

然後我們就開始增加名額, 開始找人, 結果我們有了一個決定, 從此以後要加入數學所, 進來一定要博士, 這個決定雖然完全不合理, 因爲優秀的人不一定是博士, 博士也不一定是優秀的。大學畢業歡迎來當助理員, 二年一到一定要走, 出去讀完博士再回來。數學所程度應該高一點, 現在不應有助理研究員, 進來就應該是副研究員, 因爲研究院你要找好的人, 助理研究員只有 Potential, 有兩種情形, 一種是好的、一種是壞的, 如果他不好還繼續下去, 何必要冒這個險呢? 所以到副研究員以上, 等到看清楚了, 再請進來。研究院不是大學, 不必同大學一樣, 我覺得研究院是另一個角色, 他主要工作是聯絡、提倡、幫助別人, 你當然要好, 才能幫別人, 你自己是助理研究員還要別人幫你, 你那有餘力去幫別人, 我自己是這樣的想法。

以後我們拚命找人, 當初我們找人, 發五張聘書, 一人接受。另外數學所請了很多客座教授, 只要請到就絕對不放手, 客座是回來一年的, 第二年回去後, 我們聘書還是發。中央研究院爲什麼要讓人掛名? 好不容易請回一個人, 你現在不給他掛名, 以後就回不來了。爲何不讓人掛名, 掛名到時候才好請他再回來嘛! 而且掛名又不花一毛錢, 你又可

以問他意見, 譬如問他最近有什麼書可以介紹一下, 有什麼人可以介紹一下, 有什麼事可以幫個忙, 到美國去還可以看看他, 又不花一毛錢, 爲什麼不做呢? 我說你跟別人聯絡感情, 別人就跟你聯絡感情, 這樣人就會回來, 你看劉豐哲、趙民德、劉兆寧先生就回來了吧。

1970年代, 數學所經費很少, 有人回來沒有房子住, 劉豐哲先生就向國防部請了個計劃, 要二十萬塊錢, 幫他們做空飄氣球計劃, 用它蓋了兩棟房子, 交給同仁居住。我要講的是, 很多事情沒有錢可以想辦法。以後我們請張系國回來, 台灣的中文電腦就是他推動的, 我們也沒有錢, 我們請行政院主計處付錢, 不過每星期他一天在行政院工作, 四天在數學所工作, 沒有錢就請別人幫忙, 不用中央研究院的錢。現在錢多反而不好, 如這個錢可以用, 那一個錢不可以用, 該用不用就被別人罵。

附帶一提, 1970年以後大陸原本有一個英文的數學雜誌, 他們因爲文化大革命就沒有了, 所以整個中國說起來沒有一本數學雜誌, 我覺得數學研究所應該有一本數學雜誌。人是可以沒有, 但是雜誌應該有的, 像法國 Comptes Rendus des Sciences 就是法國科學院的雜誌, 美國科學院的 Proceedings 是美國科學院的雜誌, 他們科學院沒有人, 但都有雜誌。因爲數學所沒有人, 我就找台大、淡江談, 但是台大已經有了一個雜誌叫台大雜誌, 淡江也有了, 當時清華正準備辦, 他們都要自己辦, 都不與中研院合作, 所以數學所只有自己辦, 因爲別人都在辦, 中研院數學所是非辦不可的, 當初要辦這個雜誌很多人反對, 但這是全中國唯一英文的數學雜誌, 如果大陸有, 我們可以不辦, 但大陸沒有, 所以我們一定要辦, 我們要搶先大陸, 我們辦了, 大陸就不好辦了。另外我們講數學要推廣, 我們要推廣目前的數學工作, 另外將不接觸數學的人拖進數學來, 尤其是年輕人, 所以當初我們就到建國中學及很多其他中學去, 希望他們讀數學。同時也辦了一個雜誌叫「數學傳播」, 這是劉豐哲先生堅持要辦的, 我說這雜誌很麻煩, 很累, 而且容易挨罵。我跟他說如果眞的要辦是你的雜誌, 好壞都是你的。我覺得「數學傳播」辦得很了不起, 這不是看「數學傳播」很了不起, 我是說辦「數學傳播」本身很了不起, 辦「數學傳播」辦出了很多很好的數學家。

因爲有人覺得, 只有文章是眞的, 這點我同意, 但文章怎樣才會出來, 又分兩種, 你很聰明當然會有。若你不那麼聰明就要靠別人幫忙, 與別人聯合起來。我們做爲一個教育家要假定別人不那麼聰明, 天才當然不用管他, 天才是天生聰明, 我們沒有別人聰明如何教他, 所以我們只教不是天才的, 他們要靠我們幫忙, 因此彼此要在一起, 我跟你談, 你跟我談, 就一道上去了, 這樣文章就出來了。我覺得「數學傳播」在這方面辦得很不錯,「數學傳播」比我們 BULLETIN 好了很多倍。我聽過很多中國數學家批評 BULLETIN 這個雜誌, 我就反問他們有幾個人在這雜誌登過文章, 這是第一件事情。第二件事情是中央研究院在大陸的時候也有數學雜誌, 我看過那雜誌, 那雜誌水準絕對不會比

我們雜誌高, 也是英文, 爲什麼那個時候認爲那本雜誌很好, 現在會覺得我們的雜誌不好, 我不太懂。譬如說徐賢修先生當初有很多篇文章就在那個雜誌發表, 楊忠道先生也有文章在那個雜誌發表。雜誌的好壞要看投稿的人, 反過來講, 你是好的數學家, 無論你的稿子投到那個雜誌, 都是好的, 絕對不會因爲投到不同雜誌而影響其好壞。我的意思是說, 這邊是很辛苦認眞在辦一件事, 這是需要很多人幫忙, 不能說只把我們的文章投到好的雜誌上, 這樣所有好的文章都在好的雜誌, 就永遠不可能有新的雜誌了。

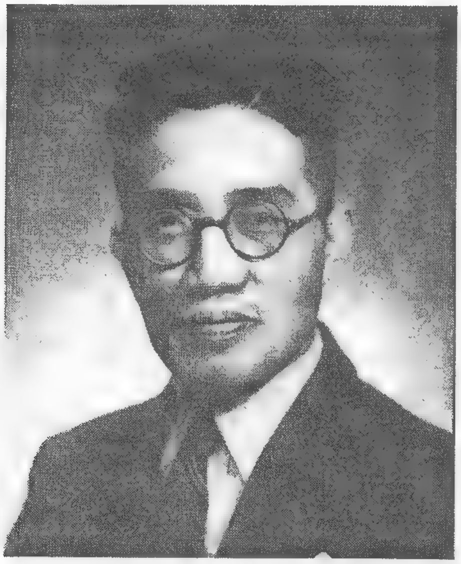
到1980年以後, 我想大家都熟悉了, 增加了很多生力軍, 這時候黃啓瑞, 姜祖恕都參加了。我自己覺得數學所在我知道的情形下, 做一個研究數學的 Institute 來講, 在全世界排名應該在前十五名。講到台灣的數學, 我雖然不能講數學所貢獻很多, 但若沒有數學所, 台灣數學不可能有今日的水準。像數學所圖書館是世界上最好的數學圖書館之一, 我認爲台灣的數學家要珍惜這一點, 因爲有圖書才有人, 沒有書絕對沒有人, 有人沒有書是沒有用的。沒有人的時候, 書還是要, 因爲三、四年後有什麼人要來, 你不會知道, 你沒有書絕對沒辦法留人, 我覺得這一點數學所很成功。因爲姜立夫先生、陳省身先生這些優秀的人給數學所建立了那麼好的根基, 那麼好的傳統。我當初提到傅斯年先生及姜立夫先生, 若在整個學術界相比, 姜立夫先生的地位應該比傅斯年先生高。因此數學所雖然有一段時間沒有人, 但是現在也很不錯, 好像有個觀念, 我們是論質不論量。謝謝!

—本文演講者爲中央研究院院士, 記錄者爲中央研究院數學所助理—

周鴻經

李新民 • 周廣周

周鴻經: 1902年1月11日生於江蘇徐州,1957年5月7日病逝於美國。國立中央大學校長、中央研究院總幹事兼數學研究所所長。專長爲富里葉級數、冪級數。


周鴻經先生遺像

周鴻經, 字綸閣, 1902年1月11日生於江蘇徐州。父心一中年失明, 當時他才五歲, 兄抑堂十二歲, 姊鴻淑八歲, 一家靠微薄田產, 僅可溫飽。

七歲入塾, 啓蒙師司光燾, 課讀綦嚴, 當時他對四書內容完全不能領會, 但卻能背誦如流, 終身不忘。年事愈增, 涉世愈深, 對書中哲理體會愈多。他的辯才無礙, 實乃熟讀四書之功。辯論時, 每引述孔孟之句, 頓覺理直氣壯, 對方輒居下風。十一歲改入族人周德瑞家塾中附讀。當時民國肇造, 新知初開, 老師除講授四書五經外, 兼授地理格致之學。至於數學, 是到了1915年, 他十四歲插班進入銅山第一高等小學才開始接觸的。起初雖然也感到困難, 可是由於他在數學方面有特別的天賦, 不到三個月, 便已游刃有餘。從那時起, 就對數學特別感興趣, 每次考試, 總是名列前茅。在一般功課之外, 他最愛閱讀歷史掌故及筆記小說。課餘之暇, 手不釋卷, 怡然自得。因此, 他的常識及見解遠在儕輩之上, 無論在什麼場合, 析事釋理都能頭頭是道, 校長梁中樞對他特別器重。

1918年, 考取南京高等師範學校 (中央大學前身) 附屬中學。但父親心一堅欲命他去學生意, 由於梁中樞校長及長兄抑堂力勸, 始同意他升學。在南高附中四年, 備受師長, 尤其算學老師倪若水和文史老師孫本文的讚許。1921年, 南京高等師範學校改爲國立東南大學。

1922年, 自附中畢業, 成績爲全班之冠, 免試直升東南大學文理科算學系。當時算學系教授, 如熊慶來、何魯、段子燮、周家樹等, 皆素有盛名, 在他們教導之下, 學業更有長足

的進步。算學之外, 並兼從劉伯明, 柳詒徵、吳梅三位教授研習歷史、哲學與文學。

1927年, 自東南大學畢業, 初隨其業師周家樹到廈門大學任算學系助教一年, 後又在南京中學任教員一年。

1929年, 應國立清華大學之聘, 講授微積分, 深入淺出, 循循善誘, 深受學生敬仰。

1934年夏, 清華大學已決定資助他赴美國進修, 同時他亦考取了中英庚款留學英國的公費生, 因此沒有接受清華大學的資助。

1934年秋赴英國, 進入倫敦大學的大學學院 (University College), 教授 G. B. Gerfery和導師 L. S. Bosanquet 都對他特加青睞。1937年夏, 應碩士考試, 論文有兩篇: 其篇名分別爲"解析函數模之平均值"(The mean value of the modulus of an analytic function) 與"劣諧和函數" (Sub-harmonic functions), 主考者爲劍橋大學教授 G. H. Hardy, 對他稱譽備至, 該校授以特優星號之理科碩士學位。

先是, 周鴻經入倫敦大學之始, 指導教授鑑於庚款公費僅有三年, 對於課程的安排, 提出兩條途徑, 以供選擇。一是直攻博士, 研讀排定的課程, 三年可完; 一是選修喜歡的課程, 不必以學位爲目標。他內心偏向後者, 仍拿不定主意, 寫信回家請示兄長, 兄回信贊同他的意見, 事遂決定。1937年春碩士論文完稿時, 指導教授建議他繼續留校, 補修學分, 預期一年可以得博士學位。當時庚款公費業已期滿, 但他前領公費頗有節餘, 且家中亦有力量接濟, 故決定留在倫敦, 繼續學業。其攻讀博士之研究題材, 係冪級數在收斂圓上之絕對 Cesáro 可和性問題。不料是年抗日戰爭發生, 他報國心切, 不待博士學位完成, 即提前返國。

1937年秋回到國內, 政府已遷都重慶。應國立中央大學校長羅家倫之約聘, 入川擔任理學院數學系教授, 次年兼任師範學院數學系主任, 又次年再兼任理學院數學系主任。1941年, 羅校長辭職, 顧孟餘繼任校長, 聘他兼任訓導長。

1944年冬, 應印度政府之約, 赴孟買 Tata Institute 研究, 原計畫爲期一年。甫三月, 受教育部長朱家驊之急電邀約, 返國任高等教育司司長。時值抗日戰爭勝利前後, 高等教育司工作之繁重艱鉅, 爲自有教育部以來從所未有, 諸如大學課程之釐定、大專教師資格之審查、戰前戰時各大專學校學生學籍之整理, 遷至後方之大學的復員, 淪陷區已停辦之大專學校的恢復, 及淪陷區的大專學校教師、畢業生及在校生之甄審分發等等, 眞是千頭萬緒, 他襄助朱部長運籌部署, 已是費盡了心力, 還有更頭痛的事情, 就是學潮的處理。在長期對日抗戰的艱困時期, 由於學生們在生活上所受的煎熬及精神上的苦悶, 多處發生了學潮。周鴻經深深瞭解學生們的心情, 又善於辭令, 說理足以服衆, 因此每次學潮都得順利的解決。有一次, 浙江大學舉行教授座談會, 邀周鴻經參加, 他深知教授們當時心中的苦悶與牢騷, 蒞會時侃侃長談, 首先將教授心中想表達的意思全盤講出, 然後坦白而誠懇地分析政府目前的困難情形, 以致暫時無法達成各教授的心願。會議結束時, 在學術方面有傑出研究成果而爲師生所敬仰

的數學教授蘇步青說: “我以前只知道周司長在數學研究方面有卓越成就, 今天聆聽高論後, 才知周司長也是行政方面的長才。”

1948年春, 辭高等教育司司長, 專任中央大學教授。是年參選大專教育團體立法委員, 所得票數, 高居教育團體中當選立法委員者之冠。足徵周鴻經在教育界中之崇高聲望與人緣。旋兼中央大學教務長, 並代行校務。

1948年8月, 周鴻經正式受任命為國立中央大學校長。隨即辭卸立法委員。是年冬, 淮北戰事吃緊, 中央大學人心惶惶, 同仁主張遷校者甚衆。該校規模龐大, 遷校談何容易。向教育部請示遷校與否, 又無答覆。嗣戰事逼近浦口, 情勢益形緊急。部分師生因教育部對於遷校與否迄無指示, 遂紛紛自動離京。後來和平消息傳出, 留校同仁又多倡不遷校之論調。1949年1月召開校務會議, 當時議決: (一) 以不遷校為原則, (二) 圖書儀器文卷册籍擇不急用者運往上海, 員生不願留京者於安全地帶設疏散站以便退避, 願留京者購備食糧燃料以備缺乏時食用, (三) 仍照原訂日期開學上課, (四) 組織應變委員會。此一時期, 他為處理複雜之校務, 費盡心力, 憂心忡忡, 誠為一生中最感痛苦之時期。

1949年6月, 中央政府遷廣州後, 應朱家驊院長之邀, 接任中央研究院總幹事, 為辦理該院遷台事宜, 跋涉廣州與台北之間。該院遷台之研究所, 僅有數學研究所與歷史語言研究所, 前者借國立台灣大學房舍為所址, 後者暫設於楊梅。數學所原有之研究人員, 一部份仍留大陸, 一部份轉往國外, 遷台人員僅所長姜立夫及少數研究人員, 姜立夫旋即返回大陸。於是周鴻經兼任數學所所長。又應台灣大學校長傅斯年之強邀, 兼任該校教授。身兼三職, 雖行政與教學工作繁重, 仍孜孜於研究工作。由於局勢不安, 而美國之研究環境遠勝於台灣, 數學所中胡世楨、王憲鍾、廖山濤與楊忠道紛紛赴美, 以致所中人才空虛。當時僅國立台灣大學與台灣省立師範學院 (國立台灣師範大學前身) 設有數學系。此二校不僅未設數學研究所, 且一部份數學課程尚有賴中央研究院數學研究所研究人員之支援。國內既乏具有研究能力之數學人才, 而由國外延攬人才也極不容易。周鴻經雖有心圖數學研究所之發展, 但處此環境, 長才殊難發揮, 徒呼奈何。於是只能延聘上述二校之數學教師為數學研究所兼任人員, 並從此二校數學系畢業生中擇優聘為該所研究助理, 督促其勤讀數學書籍雜誌, 每週舉行研討會, 由所中人員輪流報告, 並鼓勵其出國深造, 學成歸國服務。此乃當時唯一可行之方法。中央研究院為籌建南港新址, 周鴻經費盡心力。在政府財經極端困難之情形下, 力謀增設研究所。他辭世時, 南港院址已具相當規模, 除由大陸遷台之二研究所外, 又已增設六個研究所。對於中央研究院之播遷及籌畫擴張種種工作, 周鴻經心力交瘁, 功不可沒, 而該院之數學研究所今日已人才濟濟, 往昔他所培育之數學青年, 無論仍留在海外或已返國服務, 其對數學界貢獻良多。

周鴻經有感於台灣科學界同仁缺乏聯繫, 以致未能發揮分工合作的集體力量, 更未能對於青年科學工作者盡其誘掖的職責, 爰於1950年十二月邀集學術界同仁十餘人共

商籌組“中國自然科學促進會”事宜。1951年舉行成立大會, 公推周鴻經爲該會首任理事長。該會爲台灣學術界最大的學會, 會員包括數學、物理、化學、生物、地質、地理、氣象、心理及工程等各部門的專才。該會成立後, 即與各國際科學組織取得聯繫, 並出版“科學教育”期刊, 以啓發青年追求新知的興趣。教育部採納該會的建議, 設立自然科學獎學金, 以嘉惠大學與獨立學院之優秀學生。此外, 該會所推行之工作, 尙包括舉辦學術演講會, 研討理科教材之改進及參加統一學術名詞譯名之審查等等。回顧四十年前台灣爲一科學沙漠, 周鴻經創辦的該會歷年所播下的種子, 對於今日台灣科學之蓬勃發展實具有深遠的影響。

1951年, 兼任正中書局董事長, 悉心擘劃, 挽回了該書局業務上的頹勢。

1956年秋, 應美國國務院之邀請, 前往紐約州康乃爾大學講學, 並考察美國高等教育及學術研究情況, 同時也爲中央研究院羅致人才, 原訂以一年爲期, 期滿即行回國。不幸以肝癌之疾, 割治無效, 竟於1957年在紐約州綺色佳市去世, 享年五十有五。他從感覺不適以至逝世, 爲期極短, 消息傳回國內, 聞者無不震悼。總統除頒“士林楷模”輓額外, 並明令褒揚; 蔣經國之輓聯“學界共悲聞噩耗, 士林相顧失斯人”最能道出當時學術界之感受。他體質素健, 癌症之生成, 應非一朝一夕之故。論者多謂他一生廉介, 長期受生活之煎迫, 尤以逝世前之數年, 爲各書局趕編教科書, 往往夜以繼日, 積勞成疾。其實, “勞”非病之因, 實憂慮所以傷肝。他自1937年返國赴難, 迄1957年逝世, 二十年間, 歷任繁重職務, 經過抗戰復員, 國事蜩螗, 經常憂心如焚, 不曾享有一日安寧, 實爲致病之主因。倘若他能在安定環境中, 專心研究工作, 必不致英年早逝, 而且在學術上的貢獻, 當遠超過他在行政上之功績。

周鴻經逝世既久, 親友、學生、家屬對他懷念猶新, 大家公認他是一位志行高潔, 立身正直, 篤守矩矱的典型學者。忠於國家, 忠於學術, 事親能孝, 事兄能敬, 對家有愛, 對友有道, 其爲人也, 富正義感, 心所謂非, 絕不遷就, 大義凜然, 俯仰無愧。

一般擔負行政責任的人, 往往由於工作繁忙, 無暇兼顧研究工作。周鴻經則不然, 他是以研究數學爲最大樂趣, 可以忘憂, 可以解勞。例如: 從前夏天, 不僅沒有冷氣設備, 連電扇亦少有, 他在房中閱讀或寫作, 常常伏案竟日, 以至深夜, 既不揮汗, 亦不驅蚊, 眞是到了忘我的境界。又如, 1955年秋, 他因心律不整住入醫院治療, 病床上以數學書籍爲伴, 友人前往探視, 勸他釋卷休息, 他說這就是最好的休息。

周鴻經雖處在生活艱苦, 政務繁忙的環境中, 從1937年起仍能陸續完成數學論文二十二篇, 其中三篇發表於中央研究院及中國數學會所發行的期刊上, 其餘十九篇則發表於 Proceedings of the London Mathematical Society, Journal of the London Mathematical Society 以及 Quarterly Journal of Mathematics, Oxford, 2nd series 三種數學雜誌上。另外還有一篇尙未脫稿。1957年四月, 周鴻經接到他的導

師 Bosanquet 自英國寫的信, 說倫敦大學認為他發表的論文已多, 預備授予他科學博士學位 (D. Sc.), 向他要全部論文, 以完成審查手續。他即寫信回台灣命家人將論文檢齊, 請其門生李新民檢查後寄到英國。不料論文尚未寄出, 噩耗已經傳來。

從留英進修到在美逝世, 周鴻經與其導師 Bosanquet 一直保持密切之聯繫。知其研究工作者, 莫如 Bosanquet。1959年中央研究院數學研究所刊印“周鴻經先生數學論文集”, Bosanquet曾撰文刊登於該文集, 敘述周鴻經歷年研究之主要成果, 並稱讚他的研究非常精微, 而所撰之手稿則準備得極好, 甚少需要修改。以下所述, 即係根據該文之內容。

周鴻經在英進修時, 曾對 Zygmund 所撰之“Trigonometrical Series”及 Hardy, Littlewood與 Pólya 三人合撰之“Inequalities”二書有透徹之研究。當時尚未出版之此二書, 對他日後之研究有莫大助益。

Hardy與 Littlewood 曾求得富里葉級數或冪級數在特定點之 Cesàro 可和性與其函數之 Cesàro 連續性之關係。Bosanquet又求得富里葉級數之絕對 Cesàro 可和性與其函數之 Cesàro 平均值有界變分有類似之關係。周鴻經根據以上之結果推斷: 冪級數在特定點之絕對 Cesàro 可和性應與其函數之平均值之有界變分有類似之關係。此一問題有關整數階絕對 Cesàro 可和性部分在第3篇論文 (指文末所附“周鴻經數學論文目錄”第3篇, 以下同,) 中已獲得解決。他再進一步研究分數階絕對可和性問題時, 則遭遇不少困難。但因此研究而獲得其他問題之解決。第2篇論文係於1936年十一月投入 Journal of the London Mathematical Society 發表, 其主要定理如下: 設

$$M_\lambda(r,f)=\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^\lambda d\theta\Big)^{1/\lambda}$$

其中 $f(z)$ 於 $|z|<1$ 時為正則的 (regular)。若 $M_\lambda(r,f')$ 於 $0\le r<1$ 為有界的, 此處 $0<\lambda<1$ (亦即 $f'(z)$ 屬於複類 L^λ), 則相關之冪級數在單位圓上幾乎到處 (almost everywhere)$|C,\lambda^{-1}-1|$ 可和。在第1篇中, 他考慮屬於複類 Lip (k,p) 之函數, 其冪級數之絕對 Cesàro 可和性問題, 亦即考慮具有下列性質之函數:

$$M_p(r,f')=0\{(1-r)^{-1+k}\},(0\le r<1)$$

其中 $p>0$, $0\le k<1$ 。Bosanquet 獲知 Hyslop 已證明: 屬於實類 Lip $k(0\le k\le(1/2))$ 之函數, 其富里葉級數是 $|C,\alpha|$ 可和的, 其中 $\alpha>(1/2)-k$ 。同時 Bosanquet 又知周鴻經已獨立研究出有關冪級數之類似結果: 屬於複類 Lip $(k,p)(0<k\le(1/2),p>2)$ 之函數, 其冪級數是 $|C,\alpha|$ 可和的, 其中 $\alpha>(1/2)-k$ 。由此結果立可導出上述 Hyslop 之結果。Bosanquet催促周鴻經快將該文寄出發表。結果上述二文同時刊登於 Proceedings of the London Mathematical Society 之同一册內。有關此類之研究結果, 又陸續刊載於第8與第12篇內。在第8篇中則討論富里葉級數, 而非冪級數。若 $1<p\le 2$, $kp>1$ 而$f(x)$ 屬於 Lip (k,p), 則其富里葉級數是 $|C,\alpha|$ 可和

的, 其中 $\alpha < 0$, $\alpha > (1/p) - k$。在第12篇中又討論冪級數在 p, k 爲其他値之情形。此文在1945年周鴻經擔任教育部高等教育司司長時寄出發表, 直到五年後始發現此文已在郵寄途中遺失。因此該文延至1951年始發表。在第3篇中他證明 $|C, \alpha|$ 可和性之必要與充分之條件, 此與 Knopp, Hardy, Littewood 與 Anderson 四人所求得 (C, α) 可和性之條件相類似。他與 Bosanquet 合撰之第6篇中, 討論兩個級數之可和性之階的有關問題, 所得之結果較前更爲廣泛。Ferrar曾求得 k 爲整數時 (C, k) 可和之必要而充分之條件。周鴻經在第13篇中則將此一定理推廣至 k 爲分數之情形。在第4, 第5與第9篇中, 他討論函數之廣義跳躍 (generalized jump) 與從富里葉係數所形成之 Cesàro 平均值的關係。在第10與第14篇中則討論冪級數在特定點之絕對 (C, α) 可和之條件。在第7, 第11與第15篇中所討論者爲有關冪級數與富里葉級數可和性因子之問題。在第15篇中證明以下定理: 若 $f(z) = \sum c_n z^n$ 屬於 L^p, $p > 0$, 則級數

$$\sum c_n e^{ni\theta}/\{\log(n+1)\}^{1/2+\delta}$$

爲幾乎到處 $|C, \alpha|$ 可和, 此處之 α 在 $0 < p \leq 1$ 時, $\alpha = p^{-1}$ 而在 $1 < p \leq 2$ 時 $\alpha > p^{-1}$。$p = 1$ 之特例已在第7篇中得到結論。有關 $1 < p \leq 2$, $\alpha = p^{-1}$ 之特例已在第11篇中獲得結論; 並推測在此種情形下, 級數

$$\sum c_n e^{ei\theta}/\{\log(n+1)\}^{1/p+\delta}$$

爲 $|C, p^{-1}|$ 可和。在第16篇中周鴻經所討論者爲有關級數之可和性因子問題。茲述定理之一如下。設 $0 \leq \alpha \leq \beta$, $\{\lambda_n/n\}$ 爲一不增的正數數列。欲使 $\sum \lambda_n |S_n^\beta - S_{n-1}^\beta| < \infty$ 蘊含 $\sum a_n \varepsilon_n$ 爲 $|C, \alpha|$ 可和, 其必要而充分之條件爲

(i) $\varepsilon_n = 0(n^{\alpha-\beta}\lambda_n)$,

(ii) $\Delta^\beta(n^{-1}\varepsilon_n) = 0(n^{-\beta-1}\lambda_n)$。

在 $\lambda_n = 1$ 之特殊情形下, 上述條件成爲 $\sum a_n$ 爲 $|C, \beta|$ 可和蘊涵 $\sum a_n \varepsilon_n$ 爲 $|C, \alpha|$ 可和之必要而充分之條件。當 α, β 爲整數時, Fekete與 Bosanquet 所得之結果 (前者考慮 α, β 爲相等之整數, 後者則考慮 α, β 爲任意二整數), 以及當 α, β 爲分數時, 周鴻經與 Peyerimhoff 獨立研究之結果, 皆爲上述結果之特例。第16 篇中某些傑出要點, 亦在他與 Bosanquet 合撰之第20篇中予以討論。在第17 篇中, 他考慮一類較 Lip (k, p) 更廣泛之冪級數, 而獲得一些有關絕對可和性與 強可和性之令人驚奇的結果, 其對於富里葉級數之應用, 則刊載於第18篇中。有關富里葉級數之強可和性的題材, 先後在第11, 第17, 第19, 第21與第22 各篇中予以討論。在第21篇中他證明以下定理: 設 $1 < p \leq 2$, $0 < \alpha < q^{-1}$, 其中 $p^{-1} + q^{-1} = 1$; 並設

$$\begin{aligned} \phi(t) &= (1/2)\{f(x+t) + f(x-t)\}, \\ \phi_\alpha(t) &= \Gamma(1+\alpha)t^{-\alpha}\int_0^t (t-\mu)^{\alpha-1} \\ &\quad \phi(\mu)du, \end{aligned}$$

而 S_n 爲 $f(t)$ 之富里葉級數在 $t = x$ 之部分和。若當 $t \to +0$ 時, $|\phi_\alpha(t)|^p = 0(1)(C, 1)$, 而 $\phi(t) \to S(C, \mu)$ (μ 爲一正

數), 則 $|S_n - S|^q = o(1)(C,1)$, 亦即此富里葉級數爲指數 q 強 $(C,1)$ 可和於 S。Hardy 與 Littlewood 之一定理即係 $\alpha = 0$ 之特殊情形, 周鴻經又曾推測: 若 $\alpha \geq q^{-1}$, 其相應之結論於 S_n 易爲 S_n^β, $\beta > \alpha - q^{-1}$ 時仍能成立。此一推測後經 Flett 證明其眞確。在第22篇中他又求得 $\alpha = 0, \beta$ 爲負數時之類似結果。周鴻經所發表之論文中, 第21, 第22兩篇, 係在 Cornell 大學研究完成, 辭世後始發表。此外尙有一文, 名爲"富里葉級數之局部性質"。此文在實質上已於1954年完成, 但尙須根據最新之研究成果予以修正, 文中討論級數 $\sum(S_n - S)/n$ 之絕對 (C,α) 可和性, 其中 S_n 爲一富里葉級數之部分和。此一性質蘊涵富里葉級數之絕對 $(C,\alpha+1)$ 可和。當 $-1 < \alpha < 0$ 時, 他求得必要而充分之條件使此性質成爲函數之局部性質。此文尙未修訂完成, 他即已辭世。

周鴻經於1929年與蘇英傑結婚, 蘇氏亦徐州城裡人, 畢業於國立中央大學藝術系。他們結婚時, 新郎著西服, 新娘禮服與披紗皆爲淡粉紅色 (時父母在堂, 忌服白衣)。在基督教堂舉行新式婚禮, 可謂開風氣之先, 很受地方人士注意, 傳爲美談。育兩男四女, 皆已成家立業。幼子廣南失怙時, 方在初中三年級就讀, 立志攻讀數學, 承父衣缽, 卒得美國加州理工學院數學博士, 現任美國加州大學教授, 可謂克紹箕裘。

周鴻經數學論文目錄:

1. Note on the absolute Cesáro summability of power series, *Proceedings of London Mathematical Society*, Series 2, Vol. 43 (1937), pp. 484-489.
2. On the absolute Cesáro summability of power series, *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 13 (1938), pp. 16-22.
3. On the absolute summability (C) of power series, *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 14 (1939), pp. 101-112.
4. Cesáro means connected with the allied series of a Fourier series, *Journal of the Chinese Mathematical Society*, Vol. 2 (1940), pp. 291-300.
5. On a theorem of O. Szász, *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 16 (1941), pp. 23-27.
6. Some analogues of a theorem of Andersen (with L. S. Bosanquet), *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 16 (1941), pp. 42-48.
7. On the summability factors of Fourier series, *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 16 (1941), pp. 215-220.
8. On the absolute summability of Fourier series, *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 17 (1942), pp. 17-23.
9. A further note on a theorem of O. Szász, *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 17 (1942), pp. 177-180.
10. On the summability of a power series, *Science Record, Academia Sinica*, Vol. 2 (1947), pp.20-21.
11. Theorems on power series and Fourier series, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Series 3, Vol. 1 (1951), pp. 206-216.

12. A note on the summability of a power series on its circle of convergence, *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 26 (1951), pp. 290-294.
13. A note on summable series, *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 27 (1952), pp. 352-355.
14. On the summability $|C|$ of a power series, *Quarterly Journal of Mathematics*, Oxford, 2nd series, Vol. 4 (1953), pp. 152-160.
15. An extension of a theorem of Zygmund and its application, *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 29 (1954), pp. 189-198.
16. Note on convergence and summability factors, *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 29 (1954), pp. 459-476.
17. A further note on the summability of a power series on its circle of convergence, *Annals of Academia Sinica*, No. 1 (1954), pp. 559-567.
18. Some new criteria for the absolute summability of a Fourier series and its conjugate series, *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 30 (1955), pp. 439-448.
19. Criteria for the strong summability of the derived Fourier series and its conjugate series, *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 31 (1956), pp. 57-64.
20. Some remarks on convergence and summability factors (with L. S. Bosanquet), *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 32 (1957), pp. 73-82.
21. On the strong summability of Fourier Series, *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 33 (1958), pp. 161-170.
22. An additional note on the strong summability of Fourier Series, *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. 33 (1958), pp. 425-435.

作者簡介

李新民: 1915生, 周鴻經之學生。國立台灣師範大學數學系教授兼主任, 國立清華大學在台復校後數學研究所首任所長及數學系首任主任, 國立中央大學校長。

周廣周: 1919年生, 周鴻經之姪。教育部高等教育司司長, 國立台灣大學教授。

對黃俊雄教授的一些追思

楊重駿

筆者最早和黃教授結識是1970年代前往數學所訪問的期間。倆人主要研究領域同屬複分析; 而黃教授的研究興趣涉及數學多方面的領域, 如調和分析、數論、統計、機率、組合等等, 他先後已有上百篇的論文, 不少刊載於有相當聲譽的國際性數學雜誌如美國數學會的 Transcations, 及 Procedings, 德國的 Math. Zeit, 英國的 Bulletin of London Math. Soc.

其它在台灣、日本及東南亞的一些主要數學刊物上也都有他的論文刊載。黃教授是台灣複分析界公認的佼佼者, 也因他的成就, 曾獲得台灣教育部學術獎。另外, 黃教授在中國大陸的複分析界也享有一定的聲譽。

黃教授的主要研究問題— 黎曼臆測及成果

從上面的成果簡介看來, 不難使人同意, 他的去世是台灣數學界的一大損失, 更可惜的是他英年早逝且壯志未酬就離開了我們。在台灣以至世界的數學界不少人都知道黃教授在他最後十年的生涯中, 正致力在克服世界公認三大難題僅剩的二大難題之一: 黎曼臆測 (Riemann Hypothesis)*。爲了方便一些讀者的閱讀及興趣, 我們先對該問題的產生作一簡介。

在研究數論有關質數 (prime number) 的種種分布理論中, 不可避免的是所謂的 Riemann-Zeta 函數:

$$\zeta(z)=\prod_{p=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_n^{-z}} \tag{1}$$

其中, p_n 是指在按大小漸增排列的無窮質數列 $(2,3,5,\ldots,)$ 中第 n 個質數, z 表一實數部 (Re z) 大於1的複變數。因任何一自然數 n 可表成若干個質數的冪次乘積, 又若定

$$\begin{aligned} F_n(z) &= \prod_{n=1}^{N}(1-\frac{1}{p_n^{-z}}) \\ &= \prod_{n=1}^{N}(1+p_n^{-z}+p_n^{-2z}+\cdots) \quad (2) \end{aligned}$$

不難看出當 z 爲實數且 >1 時, 可得

$$\sum_{n=1}^{N}n^{-z}<F_N(z)<\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}$$

* 另一難題是所謂費馬最後定理, 該難題爲數論方面的。在1993年爲英人 G. Wiles 所證明。對該問題黃俊雄教授也曾試給予簡明的反證。

因而可推得級數

$$\zeta(z)=1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\cdots+\frac{1}{n^z}+\cdots \quad (3)$$

在 $\mathrm{Re}z > 1$ 時爲絕對收斂, 因而爲在 $\mathrm{Re}z > 1$ 的半複平面上的解析函數。另一面爲衆所較熟悉的 Gamma-函數 $\Gamma(z)$ 其積分表示爲對 $\mathrm{Re}z > 0$ 時

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{z-1}du. \qquad (4)$$

註: Gamma函數爲滿足方程

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z), \quad \mathrm{Re}z>0$$

的解析函數, 特別當 z 爲正整數 n 時, $\Gamma(n+1)=n,(n-1)\cdots 2\cdot 1$ 即 n 階乘 (或 $n!$)。

現若在式 (4) 中以 $u=nv$ 代入則可得

$$\frac{1}{n^z}=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{-\infty} c^{-nv}v^{z-1}dv, \quad Rez>0. \qquad (5)$$

由此可得

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^z}=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{+\infty}\frac{v^{z-1}}{e^v-1}dv - \frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{+\infty}\frac{v^{z-1}e^{-Nv}}{e^v-1}dv \quad (6)$$

上式中, 兩個積分式子在 $\mathrm{Re}z > 1$ 時皆存在, 且不難驗證式 (6) 中第二個積分, 在 N 趨向 ∞ 時趨向於0, 於是我們可得 $\zeta(z)$ 的一個積分表示式如下:

$$\zeta(z)=\frac{1}{\Gamma(z)}\int_0^{-\infty}\frac{u^{z-1}}{e^u-1}du, \quad Rez>1. \qquad (7)$$

由此式可證得:

由式 (3) 所定的函數 $\zeta(z)$ 可解析地延拓到整個複平面, 以 $z=1$ 爲極點具留數 (residue) 爲1的亞純函數; 在整個複平面除了極點外, 其它處到處解析的函數或其可表爲兩個整函數 (entire functions) 的商式者。於是在整個複平面上函數

$$\zeta(z)-\frac{1}{z-1}$$

爲一整函數且明顯具點 $\zeta=-2,-4,-6,\ldots$ 爲其零點者。

由進一步的分析可證得當 $z<0$ 時, $\zeta(z)$ 滿足

$$\zeta(z)=2(2\pi)^{z-1}\sin\frac{\pi z}{2}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)。 \qquad (8)$$

由此, 立即可推得上式在整個複平面上成立。若在式 (8) 中以 $1-z$ 代 z, 便得最初由 Riemann(黎曼氏) 所導出的表式:

$$\zeta(1-z)=2^{1-z}\pi^{-z}\cos\frac{\pi z}{2}\Gamma(z)\zeta(z) \quad (9)$$

此式將函數 ζ 在點 z 與 $1-z$ 的值連系起來, 特別可見由 $\zeta(z)$ 在半平面 $\mathrm{Re}z>\frac{1}{2}$ 的情況可推出其在半平面 $\mathrm{Re}z<\frac{1}{2}$ 的情況。因對函數 $\zeta(z)$ 而言直線

$$\mathrm{Re}z=\frac{1}{2} \qquad (10)$$

就是所謂的臨界線。

綜結以上, 我們可得有關 $\zeta(z)$ 的零點訊息如下:

(1) 函數 ζ 在半平面 $\mathrm{Re}z>1$ 上無零點。

(2) 在半平面 $\text{Re}z<0$ 上, $\zeta(z)$ 的零點爲且僅爲 $z=-2,-4,-6,\ldots$。

從而可得結論除了點 $-2,-4,-6,\ldots$ 外, 其他 $\zeta(z)$ 的零點只可能在下面的帶狀式中:

$$0\le \text{Re}z\le 1。\qquad (11)$$

點 $z=-2,-4,-6,\ldots$ 稱之爲 $\zeta(z)$ 的平凡零點, 進一步的分析可推得 $\zeta(z)$ 在帶狀域 (11) 中有無窮多個零點。

黎曼臆測 (Riemann hypothesis) 就是猜測說: 所在條狀域 (11) 中的零點, 必位於臨界線 (10) 之上。

黃俊雄的證明

記得多年前, 黃教授曾跟筆者談及覺得他已不需要爲了升等、研究獎或資助, 而花時間精力做些小的問題, 以便多積些論文。他要專心攻克像黎曼猜測這種具有重大歷史意義的高難度問題, 也可以爲中國的數學家爭取到最大的榮譽。

現想當時他一定受到1985年轟動數學界一個重大新聞的影響, 而作出的誓言。該新聞報導近70年一直被頂尖複分析家所努力想證明的, 當時世界三大難題之一的比伯巴哈 (Bieberbach) 臆測, 卻被美國普渡大學 (Prudue) 不負什麼盛名的迪布朗基教授 (de Brange) 所證明。數學界是如何來肯定這樣一個重大而艱難的證明呢?

原來迪氏曾專研該臆測多年, 在1984年時曾將他的證明論文投寄給該方面的一權威, 卻遭到束之高閣的冷落。後來迪氏有了個機會參與了美俄兩方科學院的學術交流計劃, 就在1985年四月前往俄國列寧格勒大學訪問三個月。他就把他的臆測的證明在一堆俄國專家學者面前, 作了一系列的報導。在這些優秀權威學者的耐心聽講及挑剔下, 迪氏的證明終於通過了檢驗, 而得到著名的俄國史提克勒夫 (Steklev) 數學所所長 L. D. Faddeev 的正式肯定, 及把迪氏的一篇約12頁的簡單化的證明稿件通告了全世界的數學家。很快地迪氏也得到了美國此方面權威人士的喝采, 從此迪氏大名永垂數學史。

若這樣一成就發生在中國 (或華裔) 的數學家身上, 那他不知要風光幾輩子, 恐怕從此他就可以在中國的數學界呼風喚雨, 想要安靜下來都不可能了。然而迪氏不幸身在歐美的社會, 他只能享到一時的盛譽, 過此之後, 他仍像其他一些大師們一樣靜靜地繼續做他們的研究, 更不會有人來膜拜他或請他去當官, 來治校、治國或釐定國家的科技發展方針或方向。也只有在這樣一種無學術權威的自由空氣中, 學術才有不斷的新星, 出現創造性的理論得到彰顯及突破。

要想攻克世界公認的難題者除了智力外, 更需要時間及百折不撓的毅力。黃教授一向就是所裡公認爲最認眞最努力作研究的。1990年黃俊雄教授在日本京都召開的國際數學家大會 (I.C.M.) 作了一個報告聲稱他對黎曼臆測作出了否定的證明。不幸這是一次失敗對他不無打擊及一些負面的影響, 但他並不灰心反而更加努力。

他每天幾乎都埋頭苦幹於書桌及圖書館間。他也沒什麼運動及消遣, 也不抽煙喝酒或與朋友談天, 唱卡拉 O.K.。經過好一

陣子的努力, 改進思考及不厭其繁的計算, 終於寫出了一篇兩百多頁的證明 (不是反證了!) 並先後投到一些數論及分析方面的權威雜誌。據告有些很快的就將稿件退回, 表示無意處理 (因一般人總覺得眞能解決這一世界性難題的一篇論文, 其機率太低了。所以往往就不受理, 以免浪費評審員的時間及精力!), 有些甚至無回音。

筆者有次就建議黃教授何不妨學學迪氏的行徑, 找一個有聲譽及行家的研究所把證明作一系列的專題演講, 將他的證明取得肯定或對其錯有所指正, 以期確定證明的可靠性及完整性。

後來黃教授就與大陸上的一些專家們取得了連繫, 並前往北京數學所作了爲期兩週的報告。大陸數學所也的確聚集了一些權威專家及研究生, 認眞仔細地參與了他逐頁的報告。據說在進行到100頁左右時才有人指出他計算上的錯誤。

回台灣後他又努力地把問題作了精簡的證明及改正被指出的錯誤。筆者也就在1995年間邀請他到香港科大數學系作一系列的報告, 介紹他最新的證明。當時筆者也邀集了系裡一些年輕的教師及博士生好好地聽了他的幾個報告。在報告中我們也指出他證明中的一些疑點及欠嚴格性的地方。不過可以說他大致都能自圓其說。

但總結說來, 他證明的細節很難像他那樣, 經過長久及繁雜的計算或估計去核對。但最大的問題似乎在他證明的構思。他是打從假設對原 Riemann-Zeta 函數 $\zeta(z)$ 的零點平行投到臨界線上。這樣一個函數經過 $\zeta(z)$ 所滿足的關係式作解析延拓可得一個在整個複平面爲亞純的函數。而此一新得函數卻在臨界線右側的正實軸上的增長遠超過 $\zeta(z)$ 在該線段上的增長而得出矛盾, 因而證明原臆測的錯誤。但問題似乎是在這種重新建造的函數, 能否利用 $\zeta(z)$ 的恆等關係式作全面的延拓, 以及其中的一些增長估計似乎都不是很可理解及嚴格證明的。但至少說明了黃俊雄教授對此問題作出了反證的嘗試, 而且也不是很明顯的能指出他的錯誤點。所以, 筆者說這是他的壯志未酬。因爲很可能經由他的這種證明構想, 或許有人對此問題能作出突破性的進展也未定, 他及數學所也從此可揚名海內外。

對黃俊雄的追念及感言

據說平時黃俊雄教授沒有看醫生的念頭, 偶而也曾問人表示過他覺得胸中悶悶的。就在出事那天, 他不尋常地走出他的辦公室去走廊的客廳, 看讀報紙。那天回到家中, 他吃過飯洗澡時只對他家人說了一句話“我不行了”就倒了, 從此不起。

對於他的去世, 我們在這贊揚他, 追憶他已都是太晚的事了。因爲這些對一個長眠於地下的人, 已無法感受了。但他如果地下有知的話, 恐怕是希望他活著時的遭遇能從此不再降臨到其他的同仁上。希望這個社會能儘量少做文人相輕之事及錦上添花, 趨炎附勢。相信他希望, 當他有良好表現時及失敗時大家都能以平常心態來看待他。可能的話, 對他在攻克難關時, 同仁們能夠以熱誠來鼓舞他及支持他。

國人不要仍舊是一盤散沙, 或習慣於在封建的山頭及權威下討生活過日子。也即不要再結黨營私, 排擠不是同行或同支派的。迪氏已經給了我們一個很明顯的例子, 一個看來默默無聞的人, 他有天可能是摘下數學史上光亮星星的人。而過去的歷史上也多是這種類型的人。希望黃俊雄教授的去世帶給國人的深思及團結, 在講求心靈重造的今天, 其實就是要回復大家那顆寧靜、安份及淡薄名利之心, 這樣社會才能充滿眞正的歡樂及每個人能享有其各自生命的意義及眞理的追求及光大學術研究。

—本文作者任教於香港科技大學—

高木貞治 (上)

顏一清



大學時代的高木貞治

簡介:

日本在江戶時代初期曾經開展對外貿易。但隨著幕藩體制的完成, 爲鞏固實際執政者幕府將軍的勢力, 並防範基督教的侵入, 從1633年起幕府開始下鎖國令 (註1)。一直到十九世紀中葉受外國的強烈抗議後幕府終於在1859年才開放橫濱、長崎、箱館三港與外國進行貿易活動。1868年 (明治元年) 幕府還政於明治天皇。這時候日本萬事俱廢, 一切在有待開發的情況 [1]。在這個時代, 高木貞治於明治8年 (1875) 出生在岐阜縣的鄉下。他小時候便有神童之名。加上家人極力栽培之下, 他順利完成了小學、中學與大學教育。又在研究所待了一年後, 1898年8月他被官派留學德國三年。他首先在柏林大學讀了一年半。當時那裡有 Schwarz, Fuchs 與 Frobenius。但前兩者年事已高, Frobenius 則正當壯年, 還在創意旺盛的時候。隨後他轉到 Göttingen 大學。那時候 Klein 與 Hilbert 還維持著兩個講座, 而且每個星期都有座談會。當年高木年方25歲, 但痛感他所知道的數學遠離當時的數學現狀有50年之憾!

在 Göttingen 大學浸淫一年半後高木在1901年9月底整裝回日, 任東京帝國大學助教授, 專授代數學課程。1903年高木升任教授。1914年第一次世界大戰發生, 日本向德國宣戰, 從此學界無法從德國獲得書籍和雜誌了。

高木早先對 Hilbert 在1878年提出的類體論的概念有興趣。在無書無訊息的情況下, 他便孤獨地研究這個題目下去。就這樣從1914年至1920年, 高木陸續在東大刊物「數學物理紀事」上發表了6篇文章。他又把

這些整理成「有關相對 Abel 理論」發表在「東大紀要」上。戰後第一次的第6屆國際數學家會議在 Strusburg 舉行之際, 高木便參與發表了上述論文。由於德國是戰敗國, 這一屆的會議德國數學家沒有被邀請參加而少掉了一群優異的代數學專家。高木的演講沒有引起聽衆的注意。

1922年高木又在「東大紀要」上發表前一篇論文的續篇: 「在任意代數體上的互逆法則」。這一篇給了 Emil Artin 靈感, 而在1924年推測「一般互逆法則」, 並在1927年證明了它。

1924 年德國數學學會委託 Hermut Hasse 續寫 Hilbert 的「整數論報告」(1897年)。(註2) Hasse 便仔細研究高木與 Artin 的理論寫成「有關代數體理論」, 分三次, 分別在1926, 27, 30年發表。

從此, 這個「高木-Artin 類體論 (Class field theory)」傳遍了全數學界, 並被視爲當時代數整數論的重要基礎理論。在1930-50年間, 兩人理論的證明被整理、簡單化並擴張。高木貞治便因「類體論」而一舉成名。日本人在國際數學界的地位也因他一躍而上了[2]。

彌後高木一直待在他的數學崗位上, 在整數論與代數學方面繼續作研究並著述, 刻意培育後進。

高木貞治在1950(昭和25) 年去世, 享年84歲10個月。

1. 身世

高木貞治在明治8(1875) 年出生在日本岐阜縣本巢郡數屋村。父親叫木野村光藏, 母親叫徒禰 (Tsune)。徒禰本來與兄、嫂高木勘助夫婦住在數屋村。明治7年她31歲嫁到附近的北方町柱木的木野村家爲後妻。前妻有兩個兒子勝太郎12歲與房吉4歲。丈夫光藏當時56歲, 小有土地, 在村公所做事, 腦筋滿靈光的。徒禰個性強, 人爽朗, 有好記性。她嫁後不久懷孕了, 她以待產爲理由回娘家, 但過後沒有再回夫家。原因是水蛭。她很討厭水蛭, 而偏偏木野村家的田地在低窪地區。在低濕的田地上有許多水蛭, 牠們會黏住農人們裸露的手脚吸血。被吸血後有搔養感, 皮膚上會留下一個洞而血流不止。聞到血腥味其他水蛭會集攏過來, 不知覺間有二十來隻水蛭成串地牽掛在手脚上。以前的農人認爲被水蛭吸血是沒辦法的事, 但是徒禰硬是厭惡它。

按道理做哥哥的勘助應該勸生產後的妹妹回婚家去。但是勘助並沒有, 他反而把出生的嬰兒報戶口成他的婚生長子, 命名爲高木貞治。

原來勘助與太太 Yio 沒有生育孩子, 只有一個繼女 Shinayo。「高木勘助」這個名字已傳三代了。第一代勘助以釀酒致富, 購得大批土地。因此, 從家裡要走到早野街上約一公里路, 用不著踏到別人的土地可以走得到。但是第二代勘助時破產, 害得他的一對小兒女, 第三代勘助與徒禰年紀小小就被迫到外頭做工賺錢。第三代勘助爲這事很以爲

憾, 一直以振興家業爲念。他辛勞工作, 貯存了錢, 叫回妹妹, 也擁有了一些田地。他本人在村公所做會計。太太內向, 體質弱, 在家裡料理家事, 由妹妹帶著僕人做田裡的工作。妹妹嫁後不久回娘家待產, 產後不想回夫家。勘助不願錯失以外甥爲繼承人這個絕好機會。

2. 幼少年時代

貞治生下來比一般嬰兒小, 也不太健康。媽媽與養父 (舅舅) 都非常疼愛他。稍長後到了夏天, 孩子們成群在附近的藪川游泳、捕魚、捉蟲。但這些貞治都沒分。一則被禁止, 二則他也興趣缺缺。

母親徒爾不想再婚, 便很賣力地在田裡工作。她唯一的樂趣是抽空帶貞治去附近的長福寺或他們家的菩提寺 (祖宗的墳墓所在寺院) 光照寺參拜。她唸的經有一種叫「御傳鈔」(既述淨土眞宗教祖親鸞生平的經文), 相當長。沒想到5歲左右的貞治會背誦如流, 讓大人們大吃一驚。

鄰家的名醫野川吉平還開私塾「湘東」。他通曉漢學、漢詩、書法、南畫、華道、茶道等六藝, 是鄉下難得一見的文士。貞治5歲左右就進這一家私塾, 並得一個號「義憲」。過後他寫的文章簡潔, 有格調, 應該跟他小時候受的啓蒙教育有關係。

明治15年4月, 七歲的貞治進數屋村的「一色小學」。當時的小學可以跳級, 他成績特優, 全是甲。六年小學他一共跳了三級, 只學了三年。

勘助的村公所剛好在學校隔鄰。貞治下課後便到村公所跟養父並桌讀書。一些家長們會教訓他們的孩子說:「學學會計先生公子的樣兒吧!」

同班有一位女同學後來說, 貞治小時候都穿直條布和服, 長得小巧可愛, 她很想碰他一下, 但是他很會唸書, 又不講話, 就不敢去惹他了。

貞治的故鄉留著許多他使用過的東西。其中有他10歲4個月時寫的作文。由它可見他那時候教育的一斑:「夫蟻者—小虫也。其種類甚多。同類以數千成群, 每群有蟻王統御之。其運糧, 雖有身之十倍重, 亦以衆蟻聚集, 不爭先恐後, 孜孜不懈運行至巢。夫人患怠惰, 放逸而後日慨歎困苦者有之。若令其目睹蟻之行爲, 豈不愧甚哉。」(以日文文言文寫成)

貞治是神童之名遠播。在明治19年1月7日岐阜市的岐阜日日新聞還報導:「高木貞治天資高, 又有映雪聚螢的勤勉, 如加上好教師的教導必成後日可待的神童。」

但是有一位女同學, 即隔壁野川家的三小姐田鶴子常跟貞治在一色小學爭第一名。這位小姐在明治7年7月生。大貞治一歲, 是一位美少女, 她個性強, 好勝, 又很喜歡走圍牆, 爬樹。秋天一到, 那一帶的柿子成熟成美麗的橘紅色。這時候田鶴子常常負責爬到樹上摘柿子扔下來給樹下她父親的門生們。(她叫他們爲「塾的衆人」)。

田鶴子和貞治輪流得1、2名。不過貞治拿了第2名就慘了。嚴格的勘助會讓個子小小的貞治在門外罰站, 背上還綁著沈甸甸的桌子。養父的意思是「怎麼可以輸給女流之

輩?」。而沈重的桌子有著他須背負勘助三代重任的象徵性意義吧。

明治19(1886) 年11歲的貞治進岐阜中學, 其他同學有15、16歲, 所以他是最年輕的。有一位辻嘉門 (後來姓武藤) 跟貞治相處得很好。貞治個子小, 眼睛圓圓的, 長得可愛, 所以辻逗笑他「你回家是不是還拿娃娃玩?」辻腕力強, 會保護高木免受別人的欺負。有一次運動會的一個項目是背小孩子賽跑。辻就單手背著高木跑完全程。不過遇到功課, 他就沒轍了。尤其是數學, 那就得請高木幫忙作習題。

當時沒有日文的科學教科書, 教科書常用原文書, 由老師講大意, 學生做筆記, 再解習題。有一位數學老師手島十郎, 他常常以熱烈的口吻教學生們:「少年人, 要立大志!」。高木相當受他的影響。這位手島老師的代數課難, 考試更難。高木解他的題目還是解得很順利。結果老師的題目越出越難, 讓其他學生叫苦連天。當老師不在時, 大家便趕緊求助於高木。

到了明治21年, 當年貞治13歲。由於縣政府經濟困難, 縣議會有「中學廢止案」。結果學生們拿棍棒、拐杖等去向議員示威說不能把縣裡的最高學府的中學廢掉。高木等人還去找縣長抗議, 高木義正嚴詞地向縣長小崎利準說: 「日本須要面對歐美列強求生存之道。而培養人材的地方便是中學。即使要發展岐阜縣, 也須要培育人材, 所以爲國, 爲縣一定得讓中學維持下去。」總算縣長也開明, 沒有廢掉中學。

3. 青年時代

明治24年9月, 高木經推薦免試進第三高等學校 (簡稱三高)。勘助與徒禰背著貞治的大行李到岐阜車站送貞治搭車去京都上三高。爲貞治的求學, 勘助與徒禰是費盡心力的。

當時三高的校長是折田彥市。他是一位很有包容力, 有人格的長者。他在開學時會與每個新生交談, 了解他們的情況。所以他幾乎認得所有的學生。他雖然都不開口教訓學生們, 校內可井然有序。據說三高的自由校風, 就是由這一位當了三高30年校長的折田任內建立起來的。

貞治進三高不久的明治24(1891) 年10月28日清晨, 岐阜市附近發生大地震。地裂, 屋倒加上火災, 災情慘重。貞治在報上看到這個消息後坐車加上走路趕回鄉下的家。還好家屋只有偏屋倒了, 主屋沒有, 家人也沒有死傷。

不過養父勘助很生氣, 他對跑回家探視的貞治說: 「你有求學這個很重要的工作要做, 不必擔心家裡的事, 立刻回京都去!」, 而不讓貞治進入屋子。他的母親求哥哥勘助起碼讓貞治住個一宵吧, 但是勘助不肯。

過後貞治對他的幼年朋友說, 由於他養父對他求學問的堅持, 他才成了器。

貞治在中學至高校時代因肺的毛病回家休養幾乎一年, 不過並沒有休學, 還是進了級。當時他的母親說:「如果你有三長兩短, 我們的努力全泡湯了。」

高木是在三高時代才決定專攻數學的, 而影響他做這個決定的人是數學教授河合十

太郎 (1865年5月-1945年2月), 河合出生在武士家庭, 學過和算, 1889年7月從東京大學畢業。他為授課煞費苦心, 講課很吸引人, 使得他的一些高足們, 如高木貞治、林鶴一、吉江琢兒、藤原松三郎等人走向數學之路。後來他留學德國的柏林大學, 在 Weierstrass 底下學過, 後轉任京都大學。他這個人有些奇行, 他常一邊走路一邊唸書 (當時路上沒有什麼車輛, 汽車還是稀有物)。有一回他被電線桿擋住去路, 他便停下來, 依然照唸他的書。第二次世界大戰後戰敗國的日本物質非常缺乏, 但是他不肯買黑市的食品, 結果因營養不良致死。

明治 27(1894) 年 7 月高木免試進東京帝大理學部數學科, 他受教於菊地大麓 (1855-1917) 與藤澤利喜太郎 (1861-1933)。這兩位是明治以後日本數學界最早的核心人物。菊地早年留學英國, 受的是英國式基礎教育, 藤澤則東大畢業後留德。菊地官運亨通, 35歲任東京大學校長, 41歲時當文部大臣, 所以沒有繼續作數學研究, 不過他為人溫和, 寬宏大量, 對教育有遠見, 也寫了一些幾何學教科書。高木很仰慕菊地的人品。他說「菊地先生是我的大恩師, 沒有他我無法成功」, 又說:「我為研究而苦惱時, 菊地先生常常會出現在腦際, 奇妙地鼓勵我」。

藤澤留學柏林大學, 上過 Weierstrass, Kronecker, Fuchs 等大師的課。回日後, 他在東京帝大任教, 並立即修改數學課程, 加上「函數論」。這對日本數學的發展很有關係。他自己則擔任解析課門。

1900年的第2屆國際數學家會議藤澤代表日本參加。會中他聽到了 Hilbert 有名的“Paris Problems”, 等他回日, 了解後他便寫文章向日本數學界引介“Paris Problems”。他做事積極, 個性固執。他研究的方向後來轉向保險業, 也寫了幾本這方面的書。

高木讀大學時天文、數學、物理與化學科一年級一起上課。課程有菊地的「立體幾何學」。藤澤的「微積分」、與寺尾壽的「天文學」。

有一次考藤澤的「微積分」時, 物理科的本多光太郎 (後年因鋼鐵方面的研究得過文化勳章) 說:「我已經讀完筆記四次, 考題從那裡出來都沒有問題」, 高木笑著回他話:「難道數學這門課, 還要用背的嗎?」考試的結果滿分是100分, 但是藤澤給高木打了140分。可見藤澤很賞識高木對問題的表達方式。

高木大三時菊地已經當了校長, 藤澤主持數學科。藤澤讓學生們作數學討論, 並把結果印成册, 高木寫了「有關 Abel 方程式」, 有67頁。

高木在大學時代同學們給他「如來」的綽號。這表示他頭腦清晰, 也意味著他話少, 不易親近, 讀書時坐姿端正得活像如來佛的端座像吧。高木並不排斥這個綽號, 留學時給同學寫信會簽上「如來」這個名字。

小學時常與高木爭第1名的鄰居才女野川田鶴子在14、5歲以她二姐給她心愛的娃娃為交換條件, 代二姐過繼給當醫生的叔父川次郎。因為叔父家只有男生。結果田鶴子被那些男生整得好慘。後來她也唸中學。高木念念不忘她, 在大學時央人去提過親, 但是野川家沒有接受。不過等到高木將公費留

學時, 野川家倒滿後悔的。田鶴子後來嫁給一位英文學學者, 38歲守寡後自立更生, 開起美容院來, 也還滿成功的。晚年高木在數屋生活時問過田鶴子的姪子野川保:「你有一位姑姑叫田鶴子, 她現在怎樣了?」

明治30年7月高木大學畢業回家, 家人好高興, 總算熬到讓他大學畢業了! 勘助也就請親戚們來慶賀一番。這時候勘助才告訴貞治他的身世。當時貞治的父親已經去世(在明治25年), 便請來他的兩位哥哥來讓他們彼此相認。

接著高木進研究所。那時候的研究所並不開課, 只是讓學生自己讀書、作研究。在一年之間高木寫出兩本書「新撰算術」與「新撰代數學」來。當時的數學書還是直寫的, 這兩本書由博文館出版, 屬於「帝國百科全集」叢書。

「新撰算術」的內容有整數論初步, 數概念的嚴密展開, 使用 Heine 的 Canchy 數列法, 無理數的 Dedekind 切斷法等。在當時是非常高水準的算術書。

「新撰代數學」的內容是多項式論、代數方程式論、行列式論、二次形式論等而終於 Lagrange 的3次, 4次方程式解法。是以 W. E. Weber 當時的名著"Lehrbuch der Algebra"I, II(1895-96) 爲藍本寫成的。那時候高木將由文部省派往德國留學3年已成定局, 他只好請朋友校正「新撰代數學」, 在赴德的船上寫序文, 書出版時已經是明治31年11月, 人都已經在柏林了。

4. 留學

高木坐船出國時藤澤還到橫濱送行, 勘助與徒爾也在送行之列。從此貞治與勘助是永別了。勘助在貞治留學期間去世。

在那時候坐船從日本到歐洲差不多要40天。船在上海、香港、新加坡等港停靠, 然後開到法國馬賽港, 從馬賽再搭火車至柏林。

按高木自己的描述, 留洋使他又興奮又害怕。因爲柏林大學早先有 Weierstrass, Kronecker 與 Kummer 等大師, 過後有 Schwarz, Fuchs 與 Frobenius 等重量級人物。這些教授們對他來說簡直是神, 而他一個東方書生, 既沒有學養, 又沒有自信, 要跳進那樣的地方, 實在覺得好可怕![3]

當時德國的大學生每學期可以在任何大學聽課。學生們先聽講6星期, 如果想選就拿自己的身份證明繳費索取聽講證便是。

高木對 Schwarz 與 Fuchs 的講課有意見。Schwarz 當時已55歲, 連照自己的論文講課都沒法子講好。而 Fuchs 已65歲, 他差不多照著 Weierstrass 的講義授課, 這個樣子沒有什麼可學的。Frobenius 則還在壯年 (49歲), 自己仍繼續作研究, 滿有衝勁的。不過高木對 Frobenius 有些戒心。因爲來德前有前輩告訴他 Frobenius 很以德國的科學成就爲傲。Frobenius 說: 外國人頻繁地來德國學科學。美國人來, 最近日本人也來, 不久連猴子都會來吧。不過, 事實上還好, 高木拿問題去請教時, Frobenius 客客氣氣的說:「那很有趣, 你自己好好地想一想! (Denken Sie Nach!)」。還借給他各種論文

的印本。這一句「自己想想看」, 是高木從沒有得到過的良言。

爲了要聽在 Strusbrug 大學的 Weber 的課, 1900年春天, 高木先到 Göttingen 那裡有他三高、東大以來的同學吉川啄兒。啄兒晚高木一年出國, 一來就到 Göttingen。結果, 高木被在 Göttingen 的 Hilbert 吸引住了, 就待下來。

Göttingen 是大學城, 人口在1900年代有3萬多人。城內小鳥多, 天一亮小鳥開始啁啾, 接著市政府的大鐘報時, 隔鄰的 Johanes 寺院的大鐘也敲打起來, 一天的淸晨就這樣開始。

那時候學生之間爲了決鬥, 盛行練劍。臉上有疤痕的人還顯得特別威風、神氣。

藤澤在1900年9月被派出來參加第2屆國際數學家會議。他在巴黎聽到 Hilbert 所提出的23個數學上尙未解決的問題。過後他轉道來 Göttinge, 高木與吉江去迎接他。藤澤說要去參拜 Gauss 的墳墓。兩個人都不知道地方, 只好趕緊去找。不過依高木的想法, 去探 Gauss 的墓, 不如唸 Gauss 的書重要。

Göttinge 大學在當時有1886年從來比錫大學來的 Felix Klein (1849-1925) 與1895年從 Königburg 大學來的 David Hilbert (1862-1943)。1900年時 Klein 51歲, Hilbert 38歲, 還有 E. Fischer (1875-1954) 等人, 陣容很強。

高木在他寫的「回顧與展望」[3] 中敍述:「 Göttinge 大學與柏林大學迥異, 那裡每週有一次座談會, 它不單是德國, 而是全世界精英聚集於一堂的集會, 那裡是全世界的數學中心。我在 Göttingen 痛感自己徒長25歲, 而我所知道的數學遠離當時的數學現狀有50年之遙!這50年的差距, 要在一兩年之內趕上談何容易!但是在這以後的一年半時間浸淫在 Göttinge 的氣氛中, 不知覺間這種遲緩的感覺消失了。」

Klein 的課在當時非常熱門。Klein 講得精彩又有趣, 他先講一般論。高木聽過他的解析幾何學與射影幾何學6個星期, 他等於把 Klein 授課中最精華的部份吸收到了, 覺得再聽下去收獲不會多多少而作罷, 也就沒有繳聽講費。

Klein 的見解是捕捉表面上看起來完全不一樣的數學各科門的內在共通本質, 並把這些統御起來。是一種現代文化主流的高度本質主義。高木學到了這一點。

Hilbert 在這一層的特性比 Klein 還更顯著。1897年 Hilbert 出版他的名著「代數體的理論」(通稱「整數論報告」), Hilbert 把當時爲止的有關代數整數論用他創新的方式, 在統一視野之下簡潔、明快地展現出來。他更推測, 相對 Abel 體論中有未被發現的美妙的普遍性法則存在。這一本書在高木以後的研究過程中, 扮演聖典般的角色。

高木去找過 Hilbert, Hilbert 問他是不是要做代數體整數論? 高木告訴 Hilbert 他想做 Kronecker 預測的「青春之夢」(Jugentraum) (註3) 中, 基礎體是 Gauss 數體的情形。Hilbert 說:「好啊!」就在走路半途中的路邊, 以拐杖畫出正方形與圓, 表示用 Lemniscate 函數把正方形等角寫像到圓內的情形。這是 Schwarz 做過的。Hilbert

說:「你從 Schwarz 那兒來知道這個吧?」事實上高木不怎麼懂。

Kronecker 的「青春之夢」是他對橢圓函數的虛數乘法上的一種推測, 即:「虛2次體 K 上的相對 Abel 體應可由 K 爲元素而有虛數乘法的橢圓函數的變換方程式中得到。」這是當時未被解決的難題。

高木在 Göttingen 逗留期間解決了上述問題中基礎體爲 Gauss 數體的特殊情形。高木把他研究的結果給 Hilbert 看過。回日後他發表這篇論文而得到博士學位。

20年後, 高木完成類體論時 Kronecker 的「青春之夢」的一般情形, 只不過是其中的一種應用罷了。

Hilbert 有銳利的觀察力, 能夠把複雜的對象中眞正支配著它的本質挖掘出來。這種高度本質主義也便是類體論的特徵。在1900年代 Hilbert 的研究已經離開代數整數論, 所以高木沒有直接受到 Hilbert 的指導。但是 Hilbert 在研究本質上和精神上給高木的影響是不可磨滅的。

—本文作者任教於輔仁大學數學系—

星空燦爛的數學 (I)
——托勒密如何編製弦表?

蔡聰明

摘要: 古希臘的偉大天文學家托勒密說:「平凡若我者, 本應如蜉蝣一般朝生暮死。但是, 每當我看到滿天的繁星, 在不朽的天空, 按照自己的軌道井然有序地運行時, 我就情不自禁地有身在天上人間的感動, 好像是天帝宙斯 (Zeus) 親自饗我以神饌。」這種激情 (passion) 就是支持托勒密不息工作的動力泉源, 他用數學來捕捉星空的規律、對稱、恆常與美。然而、星空的規律 (如周轉圓、天動說) 短暫, 會過時, 留下的數學卻萬古長青。

天文現象離人類最遙遠, 但是星空卻最容易令人產生秩序感、敬畏、驚奇與美感 (sense of order、awe、wondering and beauty), 加上制訂曆法和農耕的需要, 這些就導致天文學變成是最早發展的一門學問, 同時也促動了 (平面與球面) 幾何學和三角學的誕生。

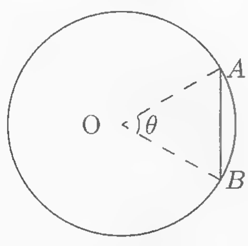


Claudius Ptolemy (with the goddess Astronomy). "we shall only report what was rigorously proved by the ancients . . ." (Courtesy O. Gingerich)

圖一. 托勒密 (與天文女神)。"我們只報告曾被古人嚴格證明的事實。"

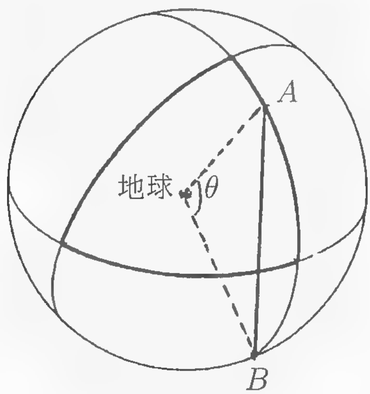
天文學與幾何學、算術、音樂形成古希臘的四藝 (quadrivium); 到了中世紀再加上三藝 (trivium): 文法 (grammar)、修辭 (rhetoric)、辯證 (dialectic), 合成七藝 (seven liberal arts and sciences)。

需要爲發明 (或發現、創造) 之母。在接受地球中心說 (geocentric theory) 之下, 天文學家托勒密 (Claudius Ptolemy, 約西元100-178年, 請不要跟古埃及托勒密王朝的托勒密一世、二世· · ·混淆), 參見圖一, 爲了天文學的「測星」與幾何學「測地」之需要, 必須知道各種圓心角θ所對應的弦$\overline{AB}$之長, 參見圖二。我們不妨假設圓的半徑$R = 1$, 因爲一切都是比例問題。

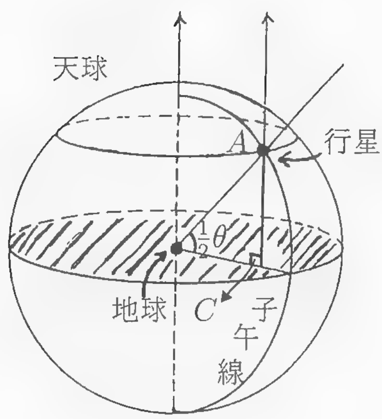


圖二

詳言之, 在同一個球面上兩個星球的距離就是一根全弦的長, 即圖三的$\overline{AB}$。另外, 星球與地平面的距離是半弦之長, 即圖四的$\overline{AC}$, 它是圓心角之半$\frac{1}{2}\theta$的正弦, 即$\sin\frac{1}{2}\theta$, 半徑R已取為1。在使用上, 全弦與半弦只差個2的因子, 所以並沒有區別。



圖三



圖四

托勒密在西元150年出版13冊的數學文集, 蒐集當時已知的數學與天文學知識, 加上自己的獨創, 並且利用離心圓 (eccentric circles) 與周轉圓 (epicycles, 即一個轉動圓, 其圓心又在另一個轉動圓的圓周上), 成功地描述了行星運動的軌道, 保住了行星運動的現象, 並且鞏固了地球中心說。這使得在他之前的三角學與天文學著作都黯然失色, 甚至失傳, 真正發揮了「良幣驅逐劣幣」的功能。

後來, 托勒密這套書傳到阿拉伯世界, 約在西元800年被翻譯成阿拉伯文, 阿拉伯人尊稱為「Almagest」, 意指「最偉大的書」。後世的數學史家也稱讚它具有完備性 (completeness)、緊緻性 (compactness) 以及典雅性 (elegance)。歐幾里得 (Euclid)13冊的「幾何原本」之於幾何學, 就相當於托勒密13冊的「Almagest」之於天文學。

「Almagest」在西方失傳, 到了十三世紀末, 由阿拉伯傳回西方, 譯成拉丁文, 使得歐洲人重新認識古希臘文化的精神, 開始了文藝復藝運動。托勒密的天文體系, 一直沿用到十六、七世紀, 才逐漸被哥白尼 (Copernicus, 1473-1543) 與刻卜勒 (Kepler, 1571-1630) 的太陽中心說 (heliocentric theory) 所取代, 這就是著名的哥白尼革命, 接著啓動十七世紀的科學革命, 十八世紀的啓蒙運動、政治革命, 十九世紀的工業革命, 以至於二十世紀今日的資訊與分子生物學之革命。

托勒密在「Almagest」的第一冊中編製了一個數值表, 對於圓心角θ從0°開始, 以0.5°的間隔變到180°, 列出全弦$\overline{AB} = \mathrm{Crd}(\theta)$之長, 叫做弦表 (a table of chords), 參見圖二。因為

$$\mathrm{Crd}(\theta) = 2\sin\frac{\theta}{2}$$

所以弦表就相當於從0°開始, 以0.25°為間隔變到90°之正弦函數表。事實上, 托勒密選取

圓的半徑$R = 60$, 即採用巴比倫的六十分制。托勒密的弦表在天文學界使用了大約一千年之久, 直到三角函數表出現爲止。

天文學是數學 (也是物理學) 的故鄉。托勒密對於「一根弦的秘密」與「行星的運行」之追尋, 除了產生幾何學與三角學之外, 進一步變成往後一些數學發展的泉源。例如, 周轉圓的概念是十九世紀傅立葉分析 (Fourier Analysis) 的胚芽之一。因此, 托勒密的工作堪稱爲「有源頭活水」。宋朝的朱熹, 在「觀書有感」中說得好:

半畝方塘一鑒開,
天光雲彩共徘徊,
問渠哪得清如許?
爲有源頭活水來。

本文我們要用一系列的文章, 介紹托勒密的偉大工作, 背後所牽涉的數學, 以及一些後續的數學發展。現在我們就先從「托勒密如何編製弦表」談起。

一. 特別角所對應的弦長

托勒密要編製的弦表, 就是完成下面的表格:

圓心角θ	$0°, 0.5°, 1°, 1.5°, \cdots, 180°$
相應的弦長 $\overline{AB} = \mathrm{Crd}(\theta)$	$0, \cdots \cdots \cdots \cdots, 2$

按常理, 當然是從簡易處著手。

大家都知道, 正多邊形有無窮多種; 但是正多面體不多也不少, 恰有五種, 叫做柏拉圖 (Plato) 五種正多面體。在正多邊形中, 以正三、四、五、六、十邊形之邊長, 較容易求得, 只需用一點兒平面幾何的知識。

(i) 圓內接正三角形, 參見圖五。

$\theta = 120°$, 由畢氏定理知

$$\mathrm{Crd}(120°) = \overline{AB} = \sqrt{2^2 - 1^2}$$
$$= \sqrt{3} \doteqdot 1.732$$

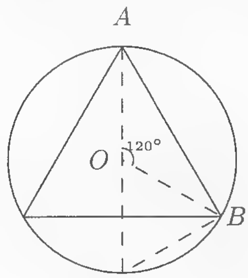
(ii) 圓內接正方形, 參見圖六。

$\theta = 90°$, 由畢氏定理知

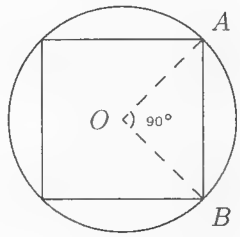
$$\mathrm{Crd}(90°) = \overline{AB} = \sqrt{1^2 - 1^2} = \sqrt{2} \doteqdot 1.414$$

(iii) 圓內接正六邊形, 參見圖七。

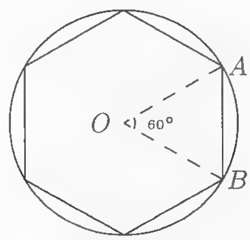
$\theta = 60°$, $\mathrm{Crd}(60°) = \overline{AB} = 1$。



圖五



圖六



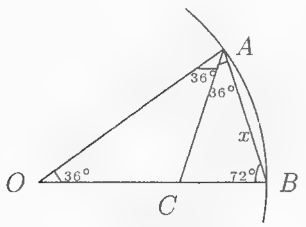
圖七

二. 正五邊形與正十邊形

正五邊形與正十邊形的關係密切, 我們由後者切入較容易。

在圖八中, 令 $\overline{AB} = x$ 表示正十邊形一邊之長, 它所對應的圓心角爲36°。由三角形三內角和爲180°之定理知

$$\angle OAB = \angle OBA = 72^\circ$$



圖八

以 A 點爲圓心, $\overline{AB}$ 爲半徑作一圓弧交 $\overline{OB}$ 於 C 點, 則 $\overline{AC} = x$, 從而 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ACO$ 皆爲等腰三角形。因此,

$$\overline{OC} = \overline{AC} = x, \overline{CB} = 1 - x$$

因爲$\triangle OAB$ 與$\triangle ABC$相似, 所以

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$
$$x^2 + x - 1 = 0$$

解得

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

負根不合, 棄之, 故得

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

這就是正十邊形一邊之長。

(iv) 圓內接正十邊形

$$\theta = 36^\circ,$$
$$\mathrm{Crd}(36^\circ) = \overline{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$
$$\because 0.618$$

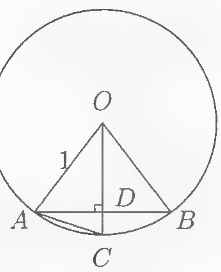
注意:$\triangle OAB$叫做黃金三角形, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$叫做黃金數。

接著, 我們考慮正五邊形。如圖九, 假設$\overline{AB}$與$\overline{AC}$分別爲正五邊形與正十邊形之一邊。令$\overline{OD} = x$, 則$\overline{CD} = 1 - x$。因爲$\overline{AB} \perp \overline{OC}$, 故由畢氏定理知

$$\overline{AO}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{AD}^2$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2$$

兩式相減得

$$\overline{AO}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{CD}^2$$



圖九

又因爲$\overline{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 故

$$1 - (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2 = x^2 - (1-x)^2$$

解得

$$x = \overline{OD} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

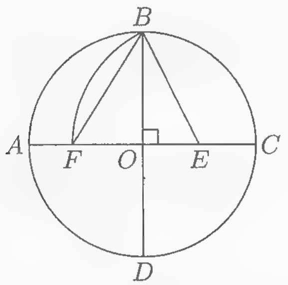
又$\overline{AD}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OD}^2$, 故

$$\overline{AD}^2 = 1 - (\frac{\sqrt{5}+1}{4})^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$
$$\overline{AB} = 2\overline{AD} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

(v) 正五邊形

$$\theta = 72^\circ,$$
$$\text{Crd}(72^\circ) = \overline{AB} = \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$
$$\doteqdot 1.176$$

由上述結果, 我們順便可得到正五邊形與正十邊形的尺規作圖方法: 如圖十, 作一單位圓, 圓心爲O, 再作互相垂直的兩直徑 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$。取半徑 $\overline{OC}$ 的中點 E, 以 E 爲圓心, $\overline{EB}$ 爲半徑, 作圓弧交 $\overline{OA}$ 於 F 點, 則易驗知 $\overline{OF}$ 與 $\overline{BF}$ 分別爲圓內接正十邊形與正五邊形的一邊, 從而可作出正五邊形與正十邊形。由此更容易求得 Crd(36°) 與 Crd(72°)



圖十

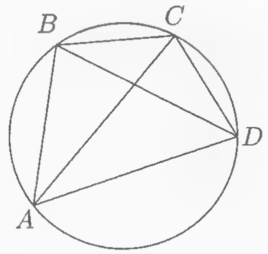
三. 托勒密定理及其應用

爲了探求更多圓心角所相應的弦長, 我們要先準備一個基本的建構工具: 從已知兩個角的弦長, 求出和角與差角的弦長。這必須用到下面著名的幾何定理:

定理1 (托勒密定理, 西元150年):
設 $ABCD$ 爲圓的內接四邊形, 則

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$$

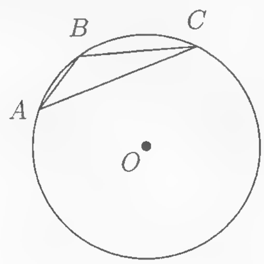
亦即兩條對角線之乘積等於兩雙對邊乘積之和, 參見圖十一。



圖十一

對於這個定理的發現、證明以及相關的發展, 我們留待以後另文解說。現在我們就利用這個定理來幫忙編製弦表。

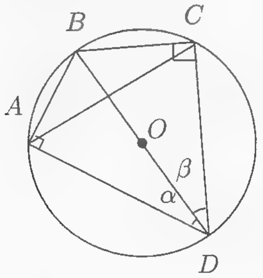
問題1: 如圖十二, 在單位圖中, 已知兩弦$\overline{AB}$與$\overline{BC}$, 試求弦$\overline{AC}$。



圖十二

過 B 點作直徑$\overline{BD}$, 連結$\overline{CD}$與$\overline{AD}$, 那麼上述問題就相當於: 已知兩圓周角α與β所

對應的弦$\overline{AB}$ 與$\overline{BC}$, 欲求和角$\alpha+\beta$所對應的弦$\overline{AC}$, 參見圖十三。



圖十三

由托勒密定理知

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{AD} \quad (1)$$

又由$\overline{BD}=2$及畢氏定理知

$$\overline{CD}=\sqrt{4-\overline{BC}^2}$$
$$\overline{AD}=\sqrt{4-\overline{AB}^2}$$

代入 (1) 式得到:

推論1: 在單位圓內, 已知兩弦 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$, 則

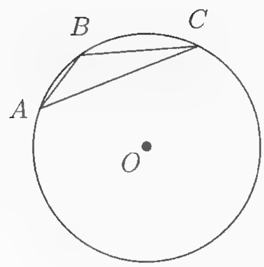
$$\overline{AC}=\frac{\overline{AB}}{2}\sqrt{4-\overline{BC}^2}+\frac{\overline{BC}}{2}\sqrt{4-\overline{AB}^2} \quad (2)$$

進一步, 利用正弦定律 (Law of sine) 可知, (1) 式等價於正弦函數的和角公式 (或複角公式)

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad (3)$$

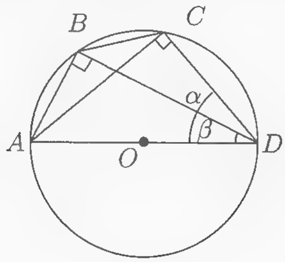
請讀者補上證明。

問題2: 如圖十四, 在單位圓中, 已知兩弦$\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$, 試求弦$\overline{BC}$。



圖十四

過 A 點作直徑$\overline{AD}$, 連結$\overline{BD}$ 與$\overline{CD}$, 那麼上述問題就相當於: 已知兩圓周角的α與β 所對應的弦$\overline{AC}$ 與$\overline{AB}$, 欲求差角$\alpha-\beta$所對應的弦$\overline{BC}$, 參見圖十五。



圖十五

由托勒密定理與畢氏定理可以推得:

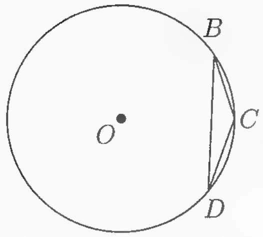
推論2: 在單位圓內, 已知兩弦$\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$, 則

$$\overline{BC}=\frac{\overline{AC}}{2}\sqrt{4-\overline{AB}^2}-\frac{\overline{AB}}{2}\sqrt{4-\overline{AC}^2} \quad (4)$$

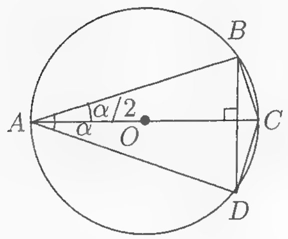
習題1: 在圖十五中, 試證托勒密定理等價於正弦函數的差角公式

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad (5)$$

問題3: 如圖十六, 在單位圓中, 已知一弦$\overline{BD}$, 並且C 爲弧$\widehat{BD}$ 的中點, 試求弦$\overline{BC}$ (或$\overline{CD}$)。



圖十六



圖十七

過 C 點作直徑$\overline{AC}$, 連結$\overline{AB}$, $\overline{AD}$與$\overline{BD}$, 則上述問題就相當於: 已知圓周角α 所對應的弦$\overline{BD}$, 欲求半角$\frac{\alpha}{2}$ 所對應的弦$\overline{BC}$, 參見圖十七。

由托勒密定理得知

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC} \qquad (6)$$

又$\overline{AC}=2$, $\overline{BC}=\overline{CD}$, 再由畢氏定理知

$$\overline{AB}=\overline{AD}=\sqrt{4-\overline{BC}^2}$$

代入 (6) 式得到

$$2\cdot\overline{BD}=2\overline{BC}\sqrt{4-\overline{BC}^2} \qquad (7)$$

於是

$$\overline{BC}^4-4\overline{BC}^2+\overline{BD}^2=0$$

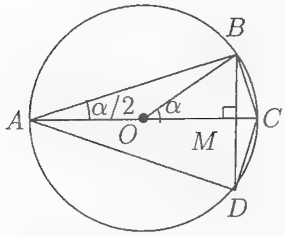
解出 $\overline{BC}^2$ 得到

$$\overline{BC}^2=2\pm\sqrt{4-\overline{BD}^2} \qquad (8)$$

正號不合。因此, 我們得到:

推論3: 在單位圓, 已知弦$\overline{BD}$ 並且C爲弧$\overset{\frown}{BD}$之中點, 則

$$\overline{BC}=\overline{CD}=\sqrt{2-\sqrt{4-\overline{BD}^2}} \qquad (9)$$



圖十八

復次, (9) 式等價於半角公式, 我們證明如下: 在圖十七中, 連結$\overline{BO}$, 令$\overline{BD}$與$\overline{AC}$之交點爲M, 得到圖十八。

(9) 式等價於

$$\begin{aligned}(\frac{\overline{BC}}{2})^2&=\frac{2-\sqrt{4-\overline{BD}^2}}{4}\\&=\frac{1-\sqrt{1-(\frac{\overline{BD}}{2})^2}}{2}\\&=\frac{1-\sqrt{1-\overline{BM}^2}}{2}\\&=\frac{1-\overline{OM}}{2}\end{aligned} \qquad (10)$$

又因爲

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BC}}{2}$$

並且

$$\cos\alpha=\frac{\overline{OM}}{\overline{BO}}=\overline{OM}$$

所以 (10) 式又等價於半角公式

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2} \tag{11}$$

總結上述, 托勒密定理的一些特例: 圓內接四邊形為鳶形, 或有一對角線為直徑, 或有一邊為直徑, 就分別等價於半角公式, 正弦的和角公式與差角公式。因此, 托勒密定理可以說是三角學的結晶。

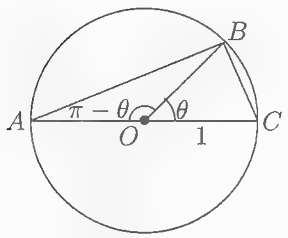
四. 初步編製弦表

利用推論 1、推論 2 與推論 3, 托勒密求出更多圓心角θ所對應的弦長$\mathrm{Crd}(\theta)$。他由$\theta = 72°$(正五邊形) 與$\theta = 36°$(正十邊形) 出發, 逐步算出其它角的弦長。

(i) 補角相應的弦長

如圖十九, 已知$\mathrm{Crd}(\theta)=\overline{BC}$, 利用畢氏定理可求得補角$180°-\theta$之弦長為

$$\begin{aligned}\mathrm{Crd}(\pi-\theta)&=\overline{AB}=\sqrt{2^2-\overline{BC}^2}\\&=\sqrt{4-\mathrm{Crd}^2(\theta)}\end{aligned} \tag{12}$$



圖十九

例1: 已知 $\mathrm{Crd}(36°)=\frac{\sqrt5-1}{2}\doteq 0.618$, $\mathrm{Crd}(72°)=\frac12\sqrt{10-2\sqrt5}\doteq 1.176$, 於是

$$\begin{aligned}\mathrm{Crd}(144°)&=\mathrm{Crd}(180°-36°)\\&=\sqrt{2^2-\mathrm{Crd}^2(36°)}\\&=\frac12\sqrt{10+2\sqrt5}\doteq 1.902\\ \mathrm{Crd}(108°)&=\mathrm{Crd}(180°-72°)\\&=\sqrt{2^2-\mathrm{Crd}^2(72°)}\\&=\frac12\sqrt{6+2\sqrt5}\doteq 1.618\end{aligned}$$

(ii) 差角相應的弦長

例2: 已知 $\mathrm{Crd}(72°)=\frac12\sqrt{10-2\sqrt5}$ $\doteq 1.176$ 與 $\mathrm{Crd}(60°)=1$, 由推論 2 知,

$$\begin{aligned}\mathrm{Crd}(12°)&=\mathrm{Crd}(72°-60°)\\&=\frac12\mathrm{Crd}(72°)\sqrt{4-\mathrm{Crd}^2(60°)}\\&\quad-\frac12\mathrm{Crd}(60°)\sqrt{4-\mathrm{Crd}^2(72°)}\\&=\frac14(\sqrt{30-6\sqrt5}-\sqrt{6+2\sqrt5})\\&\doteq 0.209\end{aligned}$$

習題 2: 求$\mathrm{Crd}(24°)$ 之值。

(iii) 半角相應的弦長

利用推論 3, 我們就可以求得半角相應的弦長。

例3:

$$\begin{aligned}\mathrm{Crd}(6°)&=\sqrt{2-\sqrt{4-\mathrm{Crd}^2(12°)}}\\&\doteq 0.105\\ \mathrm{Crd}(3°)&=\sqrt{2-\sqrt{4-\mathrm{Crd}^2(6°)}}\\&\doteq 0.052\\ \mathrm{Crd}(1.5°)&=\sqrt{2-\sqrt{4-\mathrm{Crd}^2(3°)}}\\&\doteq 0.0262\\ \mathrm{Crd}(0.75°)&=\sqrt{2-\sqrt{4-\mathrm{Crd}^2(1.5°)}}\\&\doteq 0.0131\end{aligned}$$

習題3: 試求 Crd(4.5°), Crd(7.5°) 及 Crd(9°) 之值。

五. Crd(1°)之計算

爲了要編造間隔爲0.5°之弦表, 我們必須求出Crd(1°)以及Crd(0.5°)之值。

到目前爲止, 我們已求得Crd(1.5°), 如何求出Crd(0.5°)?

因爲1.5°是0.5°的三倍, 所以欲解決這個問題, 我們必須知道Crd(θ)與Crd(3θ)的關係, 這就涉及三倍角公式

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \qquad (13)$$

利用$\text{Crd}(\theta) = 2\sin\frac{\theta}{2}$, 將上式改成托勒密的弦公式

$$\text{Crd}(3\theta) = 3\text{Crd}(\theta) - \text{Crd}^3(\theta) \qquad (14)$$

因此, 若已知Crd(3θ), 欲求Crd(θ), 我們必須求解一個三次方程式。但是, 三次方程式的求解, 直到1545年, 卡丹 (Cardan) 公式出現才獲得解答, 在托勒密時代還是無能爲力。

爲了克服這個困難, 我們可以採用線性插值法 (linear interpolation)。

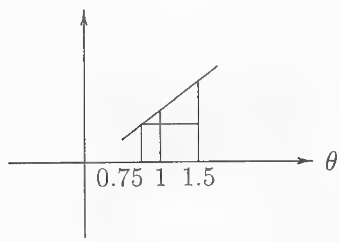
首先觀察

$$\text{Crd}(1.5^\circ) = 0.0262,$$
$$\text{Crd}(0.75^\circ) = 0.0131$$

我們發現 Crd(1.5°) 大約是 Crd(0.75°) 的兩倍, 而 1.5° 恰好是 0.75° 的兩倍。因爲 1° 是 1.5° 的 $\frac{2}{3}$, 所以

$$\text{Crd}(1^\circ) = \text{Crd}(1.5^\circ)\times\frac{2}{3} = 0.0175 \quad (15)$$

所謂線性插值法就是將Crd(θ)看成是θ的一次函數, 以探求函數值的方法, 參見圖二十。

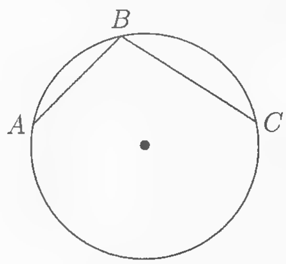


圖二十

事實上, 托勒密並不是採用線性插值法, 而是利用下面直觀的一個幾何定理來求得Crd(1°)。

定理2: 在一圓中, 見圖二十一, 如果弦 $\overline{BC}$ 大於弦 $\overline{AB}$ 並且 $\widehat{BC}$ 與 $\widehat{AB}$ 是相應的劣弧, 則

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} < \frac{\widehat{BC}}{\widehat{AB}} \qquad (16)$$



圖二十一

這個定理的證明與各種等價敘述, 包括更直觀的結果, 我們留待另文介紹。

托勒密利用定理 2 探求Crd(1°) 如下: 因爲

$$\frac{\text{Crd}(1^\circ)}{\text{Crd}(0.75^\circ)} < \frac{1}{0.75}$$

且

$$\mathrm{Crd}(0.75°)=0.0131$$

所以

$$\mathrm{Crd}(1°)<0.0175 \qquad (17)$$

又因爲

$$\frac{\mathrm{Crd}(1.5°)}{\mathrm{Crd}(1°)}<\frac{1.5}{1}\text{且}\mathrm{Crd}(1.5°)=0.0262$$

所以

$$\mathrm{Crd}(1°)>0.0175 \qquad (18)$$

由 (17) 與 (18) 兩不等式得到

$$\mathrm{Crd}(1°)=0.0175 \qquad (19)$$

接著, 利用推論3,

$$\mathrm{Crd}(0.5°)=\sqrt{2-\sqrt{4-\mathrm{Crd}^2(1°)}}$$

求得

$$\mathrm{Crd}(0.5°)=0.00875 \qquad (20)$$

六. 弦表之完成

利用上述基本數據, 透過和差角與半角公式, 就可以編製出以0.5°爲間隔的弦表。

托勒密選取圓的半徑 $R=60$, 並且採用60進位法, 按上述的方法, 求得如下之弦表。

Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν			弦表		
περιφερειῶν	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν	弧	弦	六十分之一
∠′	ō λα κε	ō α β ν	½°	0;31,25	0;1,2,50
α	α β ν	ō α β ν	1°	1;2,50	0;1,2,50
α∠′	α λδ ιε	ō α β ν	1½°	1;34,15	0;1,2,50
β	β ε μ	ō α β ν	2°	2;5,40	0;1,2,50
β∠′	β λζ δ	ō α β μη	2½°	2;37,4	0;1,2,48
γ	γ η κη	ō α β μη	3°	3;8,28	0;1,2,48
γ∠′	γ λθ νβ	ō α β μη	3½°	3;39,52	0;1,2,48
δ	δ ια ις	ō α β μζ	4°	4;11,16	0;1,2,47
δ∠′	δ μβ μ	ō α β μζ	4½°	4;42,40	0;1,2,47
ε	ε ιδ δ	ō α β μς	5°	5;14,4	0;1,2,46
ε∠′	ε με κζ	ō α β με	5½°	5;45,27	0;1,2,45
ς	ς ις μθ	ō α β μδ	6°	6;16,49	0;1,2,44
ς∠′	ς μη ια	ō α β μγ	6½°	6;48,11	0;1,2,43
ζ	ζ ιθ λγ	ō α β μβ	7°	7;19,33	0;1,2.42
ζ∠′	ζ ν νδ	ō α β μα	7½°	7;50,54	0;1,2,41
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ροδ∠′	ριθ να μγ	ō ō β νγ	174½°	119;51,43	0;0,2,53
ροε	ριθ νγ ι	ō ō β λς	175°	119;53,10	0;0.2,36
ροε∠′	ριθ νδ κζ	ō ō β κ	175½°	119;54,27	0;0,2,20
ρος	ριθ νε λη	ō ō β γ	176°	119;55,38	0;0,2,3
ρος∠′	ριθ νς λθ	ō ō α μζ	176½°	119;56.39	0;0,1,47
ροζ	ριθ νζ λβ	ō ō α λ	177°	119;57.32	0;0,1,30
ροζ∠′	ριθ νη ιη	ō ō α ιδ	177½°	119;58,18	0;0,1,14
ροη	ριθ νη νε	ō ō ō νζ	178°	119;58,55	0;0,0,57
ροη∠′	ριθ νθ κδ	ō ō ō μα	178½°	119;59,24	0;0,0,41
ροθ	ριθ νθ μδ	ō ō ō κε	179°	119;59,44	0;0,0,25
ροθ∠′	ριθ νθ νς	ō ō ō θ	179½°	119;59,56	0;0,0,9
ρπ	ρκ ō ō	ō ō ō ō	180°	120;0,0	0;0,0,0

這個表結晶著古希臘時代的數學文明, 反應了歐幾里得 (Euclid) 之後數學的再一次登峰造極, 尤其是幾何學、代數學與三角學。

以托勒密定理爲核心所編製的弦表 (相當於正弦函數表), 好比是精巧的手工藝產品; 十七世紀微積分出現後, 利用泰勒展開公式 (Taylor expansion) 所編製的三角函數表, 有如機器文明的產品。後法雖更具威力, 但我們不要忘了欣賞前法的簡潔漂亮。

七. 結語: 教室外與教室內

對於「教室外」的天文、大自然與日常生活等現象, 經過長期的觀察和體驗, 形成「教室內」的數學問題, 然後提出概念與方法, 加以解決, 再組織成有系統的數學, 將教室外與教室內連結在一起, 打成一片。這樣才是科知識發展的常理。托勒密的工作正體現著這種視野與過程, 所以更令人激賞。

大自然是數學問題的泉源。

托勒密的工作可以用來統合目前的高中數學, 進一步提供豐富的歷史、人文與數學之美。

參考資料

1. Eves, H., *Great moments in Mathematics (Before 1650)*, The Mathematical Association of America, 1983.
2. Crowe, M. J., *Theories of the World from Antiquity to the Copernican Revolution*, Dover, 1990.
3. Lloyd, G. E. R., *Greek Science After Aristotle*, W. W. Norton & Company, 1973.
4. Heath, T. L., *History of Greek Mathematics*, 2 Vols., Dover, 1981.
5. Aaboe, A., *Epsiodes from the Early History of Mathematics*, Random House, New York, 1964.
6. Neugebauer, O., *The Exact Sciences in Antiquity*, Dover, 1969。
7. Bunt, L. N. H., Jones, P. S., Bedient, J. D., *The Historical Roots of Elementary Mathematics*, Dover, 1988.
8. 片野善一郎, 數學史の利用, 共立出版株式會社, 1995。

—本文作者任教於台灣大學數學系—

牛頓計算 π

林聰源

牛頓的二項式定理

在牛頓 (Newton) 偉大的作品中, 我們只探討其中一小部分, 這是二項式定理, 它是牛頓在數學中第一個偉大的發現。依照歐幾里得或阿基米德的說法, 這不能稱之爲“定理”, 因爲牛頓沒有提供完整的證明。但他獨到的眼光與直覺, 使他寫出整個公式並且以美妙的方式應用了它。

二項式定理討論了式子 $(a+b)^n$ 的展開式。只要簡單的代數便可得出

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

等等。當然了, 如果能直接寫 $(a+b)^{12}$ 中 a^7b^5 的係數, 而無需將 $a+b$ 自己相乘12次那就太好了。二項式展開的問題早在牛頓出生以前就已經被提出來了, 而且也被解決了。中國數學家楊輝在十三世紀就知道其中的秘密, 可惜他的工作歐洲沒有人知道, 直到近代。維也特 (Vieta) 在他的工作中, 也遭遇了二項的乘冪。但巴斯卡 (Pascal) 由於發現了它的係數而成名。巴斯卡注意到係數可從下列“巴斯卡三角形”的各列輕易得出:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
等等

三角形中的每一項由其上列左邊與右邊兩個元素相加而得。因此, 根據巴斯卡的說法, 下一列是

1 8 28 56 70 56 28 8 1

其中, 譬如說, 56是由前項的左、右兩數21與35相加而得。

巴斯卡三角形與 $(a+b)^8$ 的展式之間的連繫是立即的。因爲三角形最後一行給了我們所需的係數。即

$$\begin{aligned}(a+b)^8 = a^8 &+ 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 \\ &+70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 \\ &+8ab^7 + b^8\end{aligned}$$

將三角形再擴展幾行, 我們便得792是 $(a+b)^{12}$ 展式中 a^7b^5 的係數。三角形的用途是顯而易見的。

年輕的牛頓當他想到二項展式時, 能夠設計出一個公式來直接生成二項係數, 無需繁煩地畫出三角形, 畫到足夠的列數。而且, 他深信, 像 $(a+b)^2$ 或 $(a+b)^3$ 這些二項乘冪的係數其生成公式的模式對 $(a+b)^{\frac{1}{2}}$ 或 $(a+b)^{-3}$ 同樣也成立。

這裡我們需要說一下分數與負數冪次。在基礎代數課程中, 我們學到 $a^{1/n}=\sqrt[n]{a}$ 而 $a^{-n}=1/a^n$。牛頓可能不是第一位體認到這些關係的人, 但他經常用到式子 $\sqrt{1+x}$ 或 $1/(1-x^2)$。

這裡記載的是1676年牛頓寫給與他同時代的萊比尼茲 (Leibnitz) 的一封重要的信。牛頓對他的二項展式是這麼說的:

$$
\begin{aligned}
&(P+PQ)^{m/n}\\
&=P^{m/n}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ\\
&\quad+\frac{m-2n}{3n}CQ+\frac{m-3n}{4n}DQ+\cdots
\end{aligned}
$$

其中 $P+PQ$ 是考慮中的二項式, m/n 是二項式的冪次, 可能是正或負, 整數或分數, 而 A, B, C 等等表示展式中前面那一項。

對那些已經看過現代版的二項展式的人來說, 牛頓的陳述看起來很生疏, 怪怪的。但仔細看一下什麼問題都沒有了。首先我們注意

$$
\begin{aligned}
A&=P^{m/n}\\
B&=\frac{m}{n}AQ=\frac{m}{n}P^{m/n}Q\\
C&=\frac{m-n}{2n}BQ=\frac{(m-n)m}{(2n)n}P^{m/n}Q^2\\
&=\frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)}{2}P^{m/n}Q^2\\
D&=\frac{m-2n}{3n}CQ\\
&=\frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)(\frac{m}{n}-2)}{3\times 2}P^{m/n}Q^3
\end{aligned}
$$

等等

那麼, 應用牛頓的公式, 從式子兩邊提出共同的 $P^{m/n}$, 我們得

$$
\begin{aligned}
&P^{m/n}(1+Q)^{m/n}\\
&=(P+PQ)^{m/n}\\
&=P^{m/n}[1+\frac{m}{n}Q+\frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)}{2}Q^2\\
&\quad+\frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)(\frac{m}{n}-2)}{3\times 2}Q^3+\cdots]
\end{aligned}
$$

消去 $P^{m/n}$, 便得

$$
\begin{aligned}
(1+Q)^{m/n}=1&+\frac{m}{n}Q+\frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)}{2}Q^2\\
&+\frac{(\frac{m}{n})(\frac{m}{n}-1)(\frac{m}{n}-2)}{3\times 2}Q^3\\
&+\cdots
\end{aligned}
$$

這是大家都熟悉的式子。

現在我們跟隨牛頓的腳步, 將這公式應用到幾個特別的例子。譬如, 展開 $(1+x)^3$ 時, 我們以 x 代 Q, 以3代 m/n, 便得

$$
\begin{aligned}
&(1+x)^3\\
&=1+3x+\frac{3\times 2}{2}x^2+\frac{3\times 2\times 1}{3\times 2}x^3\\
&\quad+\frac{3\times 2\times 1\times 0}{4\times 3\times 2}x^4+\cdots\\
&=1+3x+\frac{6}{2}x^2+\frac{6}{6}x^3+\frac{0}{24}x^4\\
&\quad+\frac{0}{120}x^5+\cdots\\
&=1+3x+3x^2+x^3
\end{aligned}
$$

這正是巴斯卡三角形生成的橫式; 由於我們的冪次是正整數3, 展式在四項以後停止了。

當冪次為負時一個相當不一樣的現象正等待著牛頓。作為一個例子, 展開 $(1+x)^{-3}$, 他的公式給出

$$1+(-3)x+\frac{(-3)(-4)}{2}x^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{6}x^3+\cdots$$

或

$$(1+x)^{-3}=1-3x+6x^2-10x^3 +15x^4+\cdots$$

其中右邊的級數絕不終止。由負冪次的定義這方程變成

$$\frac{1}{(1+x)^3}=1-3x +6x^2-10x^3+15x^4+\cdots$$

或等價於

$$\frac{1}{1+3x+3x^2+x^3} =1-3x+6x^2-10x^3+15x^4+\cdots$$

牛頓用交叉相乘及消去證實了這個結果, 確實有

$$(1+3x+3x^2+x^3) \times(1-3x+6x^2-10x^3+15x^4+\cdots) =1$$

當他展開式子 $\sqrt{1-x}=(1-x)^{1/2}$ 時, 事情變得更加奇怪。現在 $Q=-x$, 而 $m/n=1/2$, 所以

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x}&=1+\frac{1}{2}(-x)+\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2}(-x)^2 +\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{6}(-x)^3+\cdots\\ &=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3 -\frac{5}{128}x^4-\frac{7}{256}x^5-\cdots \qquad (*)\end{aligned}$$

為了核驗這一奇特的公式, 牛頓拿右邊的無窮級數和自己相乘, 也就是說, 他將它平方:

$$\begin{aligned}&(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\cdots)\\ &\times(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4\cdots)\\ =&1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x^2\\ &-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{16}x^3\\ &-\frac{1}{16}x^3+\cdots\\ =&1-x+0x^2+0x^3+0x^4+\cdots\\ =&1-x\end{aligned}$$

因此

$$(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\cdots)^2 =1-x$$

這就驗證了牛頓所說的

$$1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\cdots =\sqrt{1-x}$$

"因為這個定理, 取平方根變得大為省力"牛頓這麼說。假定我們要找 $\sqrt{7}$ 的一個十進位近似值。先注意到

$$7=9(\frac{7}{9})=9(1-\frac{2}{9})$$

所以$\sqrt{7} = \sqrt{9(1-\frac{2}{9})} = 3\sqrt{1-\frac{2}{9}}$ 現在把平方根用 (*) 所示二項展式中的頭6項來代替, 以2/9取代 x。我們得

$$\sqrt{7} \approx 3(1-\frac{2}{9}-\frac{1}{162}-\frac{1}{1458}-\frac{5}{52488}-\frac{7}{472392}) = 2.64576$$

這個結果與 $\sqrt{7}$ 之真值只差0.00001, 只用了六項, 實在了不起。如果我們多用幾個項, 保證可以估計得更準。同樣地, 相同的技巧也可提供三次方根、四次方根的近似值, 因爲我們可應用二項式定理展開 $\sqrt[3]{1-x} = (1-x)^{1/3}$, 如前一樣進行。

牛頓反流術—積分

這件事發生在1669年, 不過, 牛頓直到1711年才發表。牛頓說:

令任意曲線 AD 的底爲 AB, 而 BD 平行於縱軸。$AB = x$, $BD = y, a, b, c$ 等等爲已知數量, 而 m 及 n 爲整數。則

規則 1: 若 $ax^{m/n} = y$, 則 $\frac{an}{m+n}x^{(m+n)/m} =$ 面積ABD。

在圖1中, 牛頓要求水平軸之上, 曲線 $y = ax^{m/n}$ 之下, 向右直到 x 點之間的面積。根據牛頓, 這個面積是 $\frac{an}{m+n}x^{(m+n)/n}$。譬如說, 我們取直線 $y = x$ (圖2), 則 $a = m = n = 1$,

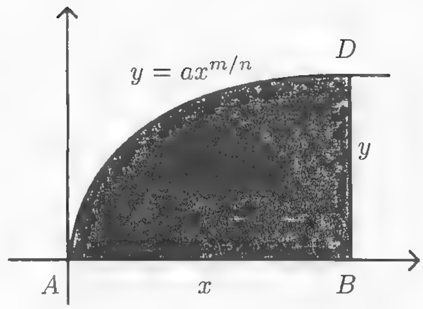


圖1

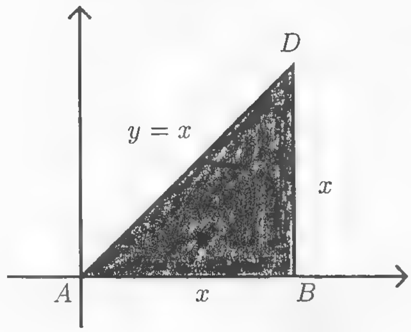


圖2

此公式給出面積 $(1/2)x^2$, 這可由三角形面積=1/2(底) × (高) 簡單地驗證。同樣地, 在 $y = x^2$ 之下介於原點與 x 點的面積是

$$x^{2+1}/(2+1) = x^3/3$$

牛頓還有一個規則2, “如果 y 的值是由許多項所組成, 則面積也是用每一項所得出的面積再求和而得。” 舉個例, 他說在曲線 $y = x^2 + x^{3/2}$ 之下的面積是

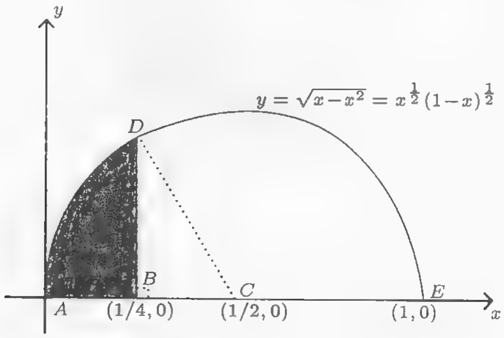
$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$$

這就是牛頓的工具: 二項式定理及曲線下求面積。這些工具在他遭遇數學及物理問題時無往而不利。下面我們要來看牛頓如何應用這些工具帶給古老的問題: π

的值的估計, 一個全新的面貌。阿基米德 (Archimede) 和維也特等人愈來愈精確地決定了 π, 在1670年左右, 牛頓挾帶著他美妙的新工具, 對這古老的死敵下達了攻擊令。

牛頓計算的 π 的近似值

牛頓顯然精通解析幾何的概念, 這由下面的工作即可看出。他取一個半圓, 圓心在 $C(1/2,0)$, 半徑為 $r=1/2$, 如下圖。



他知道圓的方程是

$$(x-1/2)^2+(y-0)^2=(\frac{1}{2})^2,$$

$$\text{即} \quad x^2-x+y^2=0$$

解出 y 得,

$$y=\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}\sqrt{1-x}$$
$$=x^{1/2}(1-x)^{1/2}$$

為什麼他選這個特別的半圓呢? 你也許覺得奇怪, 但請你看到最後就明白了!

由二項式展開的公式

$$y=x^{1/2}(1-x)^{1/2}$$
$$=x^{1/2}(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4-\frac{7}{256}x^5-\cdots)$$
$$=x^{1/2}-\frac{1}{2}x^{3/2}-\frac{1}{8}x^{5/2}-\frac{1}{16}x^{7/2}-\frac{5}{128}x^{9/2}-\frac{7}{256}x^{2/11}-\cdots$$

現在, 牛頓的天才顯現了出來。他令 B 代表點 (1/4,0), (請見上圖), 並畫出 BD 垂直於半圓的直徑 AE。然後他以兩種不同的方式計算陰影部分 ABD 的面積:

1. 用流數法

由流數法, 這裡曲線下由原點到 $x=1/4$ 點的面積是

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}})-\frac{1}{8}(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}})-\frac{1}{16}(\frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}})-\cdots$$
$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}-\frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}-\cdots$$

在 $x=1/4$ 所取的值。由於

$$(\frac{1}{4})^{3/2}=(\sqrt{\frac{1}{4}})^3=\frac{1}{8},$$
$$(\frac{1}{4})^{5/2}=(\sqrt{\frac{1}{4}})^5=\frac{1}{32} \quad \text{等等}$$

因此計算後的數值大為簡化, 取其前九項便得

$$\frac{1}{12}-\frac{1}{160}-\frac{1}{3584}-\frac{1}{36864}-\frac{5}{1441792}-\cdots-\frac{429}{163208757248}$$
$$=0.07677310678$$

2. 用幾何方法

另方面, 牛頓從純幾何的觀點看這問題。首先他決定直角三角形 $\triangle DBC$ 的面積。注意, BC 的長度是 1/4, 而 CD 爲半徑, 其長爲 $r = 1/2$。直接應用畢氏定理, 得出

$$\overline{BD} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{4})^2} = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

因此

$$\begin{aligned}&\triangle DBC \quad \text{的面積}\\ &= \frac{1}{2}\overline{BC} \times \overline{BD}\\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{4})(\frac{\sqrt{3}}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{32}\end{aligned}$$

然後牛頓需要扇形 ACD 的面積。他注意到 $\triangle DBC$ 中 BC 的長度爲斜邊 CD 之半, 因此這是一個 30° -60° -90° 的直角三角形, $\angle BCD$ 是 60°。所以扇形的面積是整個半圓的三分之一。簡而言之,

$$\begin{aligned}\text{扇形面積} &= \frac{1}{3}\text{半圓面積} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\pi r^2)\\ &= \frac{1}{3}[\frac{1}{2}\pi(\frac{1}{2})^2] = \frac{\pi}{24}\end{aligned}$$

上式中, π 這個數出現了。

由幾何方法, 陰影部分的面積等於

$$\begin{aligned}&ABD\text{的面積} = \text{扇形的面積}\\ &-\triangle DBC\text{的面積}\\ &= \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32}\end{aligned}$$

這個結果跟前面由流數法得到的結果互相比較, 便得

$$0.07677310678 \approx \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32},$$

於是解出 π 的近似值爲

$$\begin{aligned}\pi &\approx 24(0.07677310678 + \frac{\sqrt{3}}{32})\\ &= 3.141592668\cdots\end{aligned}$$

這估計值令人驚奇的一點是, 只用了二項式展開的幾個項, 就求出 π 正確到七位小數, 而我們剛才所得的估計值跟 π 的眞值差別不到 0.00000014。比起維也特及魯道夫 (Rudolph) 可怕的計算這是一項很大的進展。這個技巧唯一眞正的困難是需要對 $\sqrt{3}$ 作一準確的估計。但是, 我們已經看過了, 牛頓的二項式定理可以輕易地計算平方根。簡而言之, 這個結果明白地展示了他的新穎的數學發現在處理古老問題時非常有效, 而且是成功的。(取材自: Dunham: Jounney throuth genius, Wiley, 1990)

—本文作者任教於清華大學數學系—

密碼的計數

柳柏濂

一. 編碼, 把“水”攪混。

提起密碼, 讓我們立即想起了一個充滿奧妙的世界。“破密”和“保密”就好像矛和盾, 轟炸機和高射砲, 一直貫穿在有形和無形的戰爭中。

我們考察這樣的一種密碼。它的本質是一種字母的代換 (Substitution cipher): 把表達信息通常所用的字母, 用一個密碼本中的特殊字母代替。例如, 一個信息 MISSISSIPPI。如果我們用一個特殊密碼表—把英文 26 個字母按順時針方向排在一個圓周上, 成一個密碼表。把原信息的每一個字母, 用密碼表中該字母按順時針方向走第三個位置所在的字母代替。按這個密碼置換規則, MISSISSIPPI 變成 PLVVLVVLSSL, 這類密碼稱爲 Caesar 碼。

編碼 (encipherment) 就是把“水”攪渾, 把通常字母表達信息用字母表的特殊置換產生密碼, 而解碼 (decipherment), 就是上述置換的逆過程。

現在, 我們採用如下的一種規則: 以一篇用字母撰寫的命令爲例。我們用 A 置換第一個出現的字母, 以及在整篇命令中出現此字母的所有位置, 用 B 置換命令中下一個不同的字母以及出現此字母的所有位置, 如此繼續, 這樣得到的密碼稱爲正規密碼。(normalized cyptogram)。

於是, 按照這一算法, 不論信息 MISSISSIPPI, 還是它的 Caesar 密碼 PLVVLVVLSSL, 都可導出同一個正規密碼 ABCCBCCBDDB。

一般地, 如果 p 是任一個通常的信息, c 是 p 的一個密碼, 則 c 和 p 都有一個正規密碼 N。

我們把一個字 (或正規密碼) 中含有的字母的個數稱爲字 (或正規密碼) 的長度。一個值得探索的問題是: 有多少個不同的長爲 n 的正規密碼字?

讓我們考察一些簡單的情形。

若字的長度是 1, 則它的正規密碼必是 A。

若字的長度是 2, 則它的正規密碼是 AA, AB。

若字的長度是 3, 則所有不同的正規密碼是 AAA, AAB, ABA, ABB, ABC。

若字的長度是4, 則它的正規密碼是

$AAAA,\ AAAB,\ AABA,\ ABAA,$
$AABB,\ ABAB,\ ABBA,\ AABC,$
$ABAC,\ ABCA,\ ABBB,\ ABBC,$
$ABCB,\ ABCC,\ ABCD$

我們看到, 正規密碼只著眼於所含字母的類數和分段的長度與相對位置。

一般地, 設 $b(n)$ 表示長爲 n 的不同正規密碼的個數, 則上述簡單情況給出了如下結果:

$$b(1)=1,\ b(2)=2,\ b(3)=5,\ b(4)=15。$$

那麼, 如何求出 $b(n)$?

我們不妨把問題提得更細一點, 考慮長爲 n 的恰有 k 個不同字母的不同正規密碼, 它的個數爲 $S(n,k)$。從上面討論可知, $S(4,1)=1$, $S(4,2)=7$, $S(4,3)=6$, $S(4,4)=1$。

如果我們在一個有 q 字母的密碼表上, 考慮長爲 n 的正規密碼。把所有長爲 n 的不同正規密碼的個記爲 $b_q(n)$。

顯然,

$$b_q(n)=\sum_{j=1}^{\min(n,q)} S(n,j) \qquad (1)$$

於是, 當 $q \geq n$ 時,

$$b_q(n)=\sum_{j=1}^{n} S(n,j)=b(n) \qquad (2)$$

例如, 用英文表達的一個長爲 n 的句子, $q=26$, 當 $n \leq 26$ 時, 它的不同正規密碼個數是

$$b_{26}(n)=\sum_{j=1}^{n} S(n,j)$$

而當 $n>26$ 時, 它的不同正規密碼個數是

$$b_{26}(n)=\sum_{j=1}^{26} S(n,j)。$$

讀者耐著性子讀到這裡, 誰都會忍不住發問: 究竟 $S(n,k)$ 怎樣求出來?

從 $S(n,k)$ 的上述定義, 當然我們知道了它的實際含義。數學家的任務是通過數學的抽象和技巧把它解出來。然而, 爲了更易於解決問題, 我們可以把它轉化爲一個更容易直接思考的模型。

二. 分組, 一個“平凡”的問題

據說, 美國數學教育專家的一項調查表明, 成年人用到的數學不超過初中二年級教材的內容。然而, 如果隨便留心一下周圍的生活。你幾乎都可以提出一個“平凡”的問題, 它需要數學, 並且令大學生也爲如何去解答它弄得搔首托腮。

“十個學生 (他們的名字當然各不相同), 恰分成三組。有多少不同的分法?”現在, 我就提出這樣一個平凡的問題。

當你動手在紙上, 把鄭一, 吳二, 張三, 李四, 王五, 陳六, 何七, 趙八, 梁九, 劉十···擺弄成三堆的時候, 你會覺得, 這個問題不勝其繁。

讓我們把十個人看作一個長爲十的字, 三個小組看作是三種不同字母。於是, 長爲十的恰會三個不同字母的正規密碼一一對應於十個人的分三組的一種方案。例如

AABCACCBBA $\Longleftrightarrow$

鄭一	吳二	張三	李四	王五	陳六	何七	趙八	梁九	劉十
(1)	(1)	(2)	(3)	(1)	(3)	(3)	(2)	(2)	(1)

(不計較組的標號)

沒想到, 這個平凡的問題竟然就是求 $S(10,3)$, 讓你不覺一驚。然而, 換一個角度看問題, 當你意識到求 $S(n,k)$ 只不過是把“n 個人分成 k 組”這個如此平凡的問題時, 你難道不覺得心中大喜嗎?

就用這個模型, 我們去探索 $S(n,k)$。

顯然, $S(0,0)=1$ (無人, 又不分組)。

約定 $S(n,0)=S(0,k)=0$, $n\neq 0$, $k\neq 0$。

要這種分組能夠進行, 必須且僅須人數不少於組數, 因此

$$S(n,k)>0, \quad n\geq k\geq 1$$
$$S(n,k)=0, \quad n<k。$$

易見 $S(n,1)=1$。

考察 $S(n,2)$。把 n 個人 $(n\geq 2)$ 恰分成兩組, 每個人都可有2種選擇。由乘法原理, n 個人共有 2^n 種選擇, 但這裡可能出現所有人選第一組, 或所有人選第2組的情形, 這就不符合“恰分成兩組”的要求。於是, 應有 (2^n-2) 種選擇。但不計較組的標號, 故應 $S(n,2)=\frac{1}{2}(2^n-2)=2^{n-1}-1$。

用類似方法, 讀者可練習, 求得

$$S(n,3)=\frac{1}{3!}(3^n-3\cdot 2^n+3)$$
$$S(n,n-2)=\binom{n}{3}-3\binom{n}{4}$$
$$S(n,n-1)=\binom{n}{2}$$

現在, 讓我們借助分組模型, 用遞歸的方法, 求 $S(n,k)$ 的表達式。

更直接地, 我們把“ n 個人恰分成 k 組”看作“n 個有標號 $1,2,\ldots,n$ 的球放到 k 個無標號的盒子裡, 且無一盒空”, 它的方法數便是 $S(n,k)$。

我們著眼於球 n。若球 n 獨佔一盒, 則剩下的 $n-1$ 個球須放 $(k-1)$ 個盒, 放法數 $S(n-1,k-1)$。若球 n 不獨佔一盒 (即球 n 所在盒至少有2個球), 則可這樣操作: 先把其餘的 $n-1$ 個球放 n 個盒, 無一盒空, 方法數 $S(n-1,k)$, 然後, 再把這個球 n, 隨意放一盒, 有 n 種放法, 即共 $nS(n-1,k)$ 種放法, 於是得

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+nS(n-1,k) \tag{3}$$

衆所周知, 電腦最擅長於遞歸運算。因此, 從初值 $S(0,0)=1$, $S(0,1)=0$ 開始, 我們用電腦, 按遞歸關係 (3), 對任一對特定的 (n,k), 不難算出 $S(n,k)$。於是, 可編製出下列一個關於 $S(n,k)$ 的數值表 $(1\leq n\leq 10)$

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$B(n)=\sum_{k=1}^{n} S(n,k)$
1	1										1
2	1	1									2
3	1	3	1								5
4	1	7	6	1							15
5	1	15	25	10	1						52
6	1	31	90	65	15	1					203
7	1	63	301	350	140	21	1				877
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1			4140
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1		21147
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1	115975

從表中可見, $S(10,3) = 9330$。怪不得我們試圖拼拼湊湊, 去回答本節開頭的那個“平凡”問題, 顯得如此力不從心了。

至此, 對於 $S(n,k)$, 我們總算有了一個算法, 然而, 對追求完美的數學家來說, 仍然試圖求出 $S(n,k)$ 的顯式來。

一個自然的想法是: 從遞歸關係 (3), 用逐步遞降方法求出 $S(n,k)$ 的顯式。然而, 因爲 (3) 式右邊第二項多乘了一個變係數 n。因此, 要從 (3) 直接導出 $S(n,k)$ 變成不可能。

我們採用組合數學的另一個技巧—相容排斥原理。

先退一步考察“n 個有標號的球放到 k 個有標號的盒中, 無一盒空”的放法。請注意, 這與我們的問題區別僅在於 k 個盒“有標號”還是“無標號”而已。既然盒子多了標號, 因此, 每一個無標號盒的放置可生成 $k!$ 個有標號盒的放置。於是, 它的方法數應是

$$kS(n,k)。\qquad (4)$$

從另一方面考察, 在 k 個有標號的盒子中, 放 n 個有標號的球。若至少 j 個 $(0 \le j \le k)$ 盒是空盒, 它的放法數應是 $\binom{k}{j}(k-j)^n$。這是因爲: 先從 k 個盒中選出 j 個空盒有 $\binom{k}{j}$ 種方法, 剩下的 $(k-j)$ 個盒放 n 個標號球有 $(k-j)^n$ 種放法的緣故。由相容排斥原理, 無空盒的放法應是

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n \qquad (5)$$

既然 (4), (5) 是同一個量, 便得

$$k!S(n,k) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n$$

即

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n \quad (6)$$

於是, 我們得到了 $S(n,k)$ 的顯表達式 (6)。有興趣的讀者可以檢驗一下, (6) 式完全符合遞歸關係 (3) 及它的初值。因此, 可以說, (6) 也是 (3) 式的解。

在數學中, $S(n,k)$ 是一個著名的組合數, 稱爲第 II 類 stirling 數, 而它們的和 $B(n)=\sum_{k=1}^{n} S(n,k)$ 稱爲 Bell 數, 以紀念首先研究這類問題的數學家 J. Stirling (1692-1770) 和 E. T. Bell(1883-1960)。

第 II 類 stirling 數 $S(n,k)$ 和 Bell 數 $B(n)$ 有廣泛的應用。用數學語言來闡述: 把集 $A=\{1,2,\ldots,n\}$ 作 k 部分分拆 $\{S_1,\ldots,S_k\}$ $(\cup_{i=1}^{k} S_i = A, S_i\cap S_j=\phi, i\neq j)$。分拆數就是 $S(n,k)$, 而 A 的所有可能分拆數是 $B(n)$。考慮有限集 X, Y, 其中 $|Z|=n$, $|Y|=k$, 則由 X 到 Y 的滿射 (onto mappings) 個數便是 $k!S(n,k)$。

爲了滿足讀者的好奇心, 我們不能不談一下第 I 類 stirling 數, 雖然它跟本文的題旨無關。

如果我們把 n 個有標號的球, 分放到恰好 k 個無標號的圓周上排列, $(0\le k\le n)$。不同的排列方法數 $s(n,k)$, 便稱爲第 I 類 stirling 數。(有些著作稱爲第 I 類 stirling 數的絕對值)。

用組合方法不難得出 $s(n,0)=1$, $(n\ge 1)$, $s(n,1)=(n-1)!$ 及遞歸式

$$s(n,k)=s(n-1,k-1)+(n-1)s(n-1,k),\quad k\le n。$$

令人驚異的是迄今還未能找到第 I 類 stirling 數 $s(n,k)$ 的顯表達式。

三. 動真格, 搬出英文詞典

終於, 我們可以鬆一口氣, 滿懷信心回到密碼問題來。

由 (3) 和 (6), 我們可以計算長爲 n 的恰有 k 個不同字母的不同正規密碼數 $S(n,k)$。再由 (1) 和 (2), 可以確定地回答: 長爲 n 的不同正規密碼個數 $b(n)=B(n)$。

從編碼和語言學的角度, 我們不妨作一點有趣的探索。$S(5,4)=10$ 告訴我們, 由4個不同字母組成的長度爲5的單詞有10種類型 (正規密碼)。動眞格, 我們搬出英文詞典來。確實, 英文單詞就有這10種類型:

OOZED EVERY TASTE SPOTS
WEEDS NEVER SPOON THERE
SHALL SERVE。

然而, 對於 $S(5,3)=25$, 我們翻遍英文詞典, 只找到19類由3個不同字母組成的長爲5的單詞, 而其餘6類 $AAABC$, $ABBBC$, $ABCCC$, $AABBC$, $AABCC$, $ABBCC$ 卻寄望於未來語言學家創造新詞時填補這一空白。

如果我們考慮句子, 字與字之間就應留空。對於一些保密性能不高的密碼, 亦希望在傳遞信息的單詞之間保留空白間隔。這就給密碼的計算提出了新的要求。這種留空的限制與我們日常書寫的習慣是基本一致的: 第一、留空的位置不能相鄰 (即僅留一個空格)。第二、首末位置不留空。現在, 我們考慮這種具有留空限制的長爲 n 的正規密碼的計數。

如果僅僅考察一個長爲 n 的句子的留空方法數 f_n。那麼, 只要考慮第 $n-1$ 個位置是非空, 還是空, 兩種情形。我們就立即得到遞歸式

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_1 = f_2 = 1 \end{cases} \tag{7}$$

衆所周知, $\{f_n\}$ 是著名的費波那契 (Fibonacci) 數列。當然, 如果更仔細地討論空格的取法。例如, 在長爲 n 的句子中, 取出 r 個 $(0 \le r \le \lfloor (n-1)/2 \rfloor)$ 位置留空的方法數: ($\lfloor m \rfloor$ 表不大於 m 的最大整數) 就可以看作是在一個數列 $1, 2, \ldots, n-2$ 中 (因句子首末位不留空) 取出 r 個互不相鄰的元的方法數, 其結果 (見 [2]) 是

$$\binom{(n-1)-(r-1)}{r} = \binom{n-r-1}{r} \tag{8}$$

對照 (7), 這就恰好驗證了一個關於費波那契數列的結論

$$f_n = \sum_{r=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-r-1}{r} \tag{9}$$

現在, 我們可以著手計算有留空限制的正規密碼的個數。

設 $m_q(n)$ 爲在一個有 q 個字母的碼表上生成的長爲 n 的正規密碼個數, 這裡, 碼 (句子) 的長度意味著字母數與空隔數的總和。

如果考慮有 r 個空隔 $(0 \le r \le \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor)$ 的正規密碼。那麼, 設想把那些空隔去掉, 即讓所有字母向一邊擠緊而不留空白, 便得到一個長爲 $n-r$ 面無空隔的正規密碼。

易見, 某 r 個位置取空隔的長爲 n 的正規密碼集與無空隔的長爲 $n-r$ 的正規密碼集是一一對應的。注意到 (8) 式, 便得

$$m_q(n) = \sum_{r=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-r-1}{r} b_q(n-r)。$$

如果我們所用的字母種類數不加限制。這時記 $m_q(n)$ 爲 $M(n)$ 便得

$$M(n) = \sum_{r=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-r-1}{r} B(n-r) \tag{10}$$

下面給出一個 $M(n)$ 數值表 $(1 \le n \le 10)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M(n)$	1	2	7	25	102	456	2219	11640	65364	390646

試看 $M(4)$ 的25個留空正規密碼

AAAA	AAAB	AABA	AABB	AABC
ABAA	ABAB	ABAC	ABBA	ABBB
ABBC	ABCA	ABCB	ABCC	ABCD
AA A	AA B	AB A	AB B	AB C
A AA	A AB	A BA	A BB	A BC

四. 更精確, 借助相伴碼

既然, 編碼和解碼都追求精確, 那麼, 我們做碼的計數時, 也應追求更精密的計數。

當寫下一個正規密碼時, 最引起我們注意的是, 同一個字母連續出現的碼段, 我們稱它爲貫 (run)。一個貫所含的位置數稱爲貫的長。一個正規密碼 (本節討論不帶空隔的正規密碼) 由很多貫組成。所有貫長中的最大者, 稱爲此正規密碼的貫長。

我們約定, 正規密碼的長用 n 表示, 所含不同字母個數用 k 表示。所含貫的個

數用 d 表示, 而密碼的貫長表爲 ℓ。顯然, $k\le d\le n$, $\lceil\frac{n}{d}\rceil\le\ell\le n$, 這裡 $\lceil m\rceil$ 表不小於 m 的最小整數。例如, $ABCCBCCBDDB$, 有 $n=11$, $k=4$, $d=8$, $\ell=2$。而所有 $n=5$, $k=3$, $d=3$, $\ell=2$ 的正規密碼是 $AABBC$, $AABCC$, $ABBCC$。

比上一節更精確的一個問題是: 有多少個具有參數 n, k, d, ℓ 的不同的正規密碼?

爲了解決這個問題, 我們引進一個相伴正規密碼 (associated normal cryptogram) 的概念, 簡稱 ANC。如果把一個含 k 個不同字母的正規密碼 NC 的所有字母作不同置換 (更數學化地說: 在 k 個字母的對稱群作用下) 所得的所有密碼, 稱爲 NC 的相伴正規密碼 (ANC)。例如, $ABBAC$ 的 ANC 是 $ABBAC$, $CBBCA$, $BAABC$, $CAACB$, $ACCAB$, $BCCBA$。

爲敍述更簡明, 我們約定下列符號

$C^{(\le\ell)}_{(\le k)}(n,d)$ — 長爲 n, 貫數爲 d, 且不同字母數至多 k 個, 貫長至多 ℓ 的 ANC 個數。

$C^{(\le\ell)}_{(=k)}(n,d)$ — 長爲 n, 貫數爲 d, 不同字母數 k 貫長至多 ℓ 的 ANC 個數。

類似可知 $C^{(=\ell)}_{(=k)}(n,d)$。在上述記號中, 若 D 換爲 C, 則表同類約束條件下, 正規密碼的個數。

下面, 讀者將更多和符號打交道。我們的任務是求 $D^{(\le\ell)}_{(=k)}(n,d)$ 或 $D^{(\le\ell)}_{(\le k)}(n,d)$。由 ANC 定義, 易知

$$D^{(\le\ell)}_{(=k)}(n,d)=\frac{1}{k!}C^{(\le\ell)}_{(=k)}(n,d) \qquad (11)$$

我們先求 $C^{(\le\ell)}_{(\le k)}(n,d)$。

令 $P^{(\le\ell)}_{n,d}$ 表正整數 n 分爲 d 部分, 且每部分不大於 ℓ 的分拆個數。也即方程 $x_1+x_2+\cdots+x_d=n$, $1\le x_i\le\ell$, $\lceil\frac{n}{d}\rceil\le\ell\le n$, $1\le d\le n$ 的解 $(x_1,x_2,\ldots x_d)$ 的個數。於是

$$C^{(\le\ell)}_{(\le k)}(n,d)=k(k-1)^{d-1}P^{(\le\ell)}_{n,d} \qquad (12)$$

這是因爲 n 分拆爲 d 部分後, 在第一段 (貫) 有 k 種可能的字母選擇, 其餘 $d-1$ 段各有 $(k-1)$ 種可能的字母選擇。現在, 只須求 $P^{(\le\ell)}_{n,d}$。

運用生成函數的技巧 (見 [4]), $P^{(\le\ell)}_{n,d}$ 是 $(t+t^2+\cdots+t^\ell)^d$ 展式中 t^n 項係數。

$$\begin{aligned}
&(t+t^2+\cdots+d^\ell)^d=t^d(1-t^\ell)^d(1-t)^{-d}\\
&=t^d\sum_{r\ge0}(-1)^r\binom{d}{r}t^{\ell r}\sum_{r\ge0}\binom{d+r-1}{d-1}t^r\\
&=t^d\sum_{n=d}^{\infty}\Big[\sum_{j\ge0}(-1)^j\binom{d}{j}\\
&\quad\cdot\binom{d+(n-d-\ell j)-1}{d-1}\Big]t^{n-d}\\
&=\sum_{n=d}^{\infty}\sum_{j\ge0}(-1)^d\binom{d}{j}\binom{n-\ell j-1}{d-1}t^n。
\end{aligned}$$

注意到 $j\le d$ 且 $d-1\le n-\ell j-1$, 即 $j\le\min\{d,(n-d)/\ell\}$。於是

$$P^{(\le\ell)}_{n,d}=\sum_{j=0}^{\min(d,\lfloor(n-d)/l\rfloor)}(-1)^j\binom{d}{j}\binom{n-\ell j-1}{d-1} \qquad (13)$$

由 (12), (13), 便得

$$C^{(\leq \ell)}_{(\leq k)}(n,d) = k(k-1)^{d-1} \sum_{j=0}^{\min(d,\lfloor (n-d)/\ell \rfloor)} \cdot(-1)^j \binom{d}{j}\binom{n-\ell j-1}{d-1}, \quad (14)$$

由 (11), 我們的目標仍需求 $C^{(\leq \ell)}_{(=k)}(n,d)$。注意到

$$C^{(\leq \ell)}_{(\leq k)}(n,d) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} C^{(\leq \ell)}_{(=i)}(n,d) \quad (15)$$

運用二項式反演技巧 (見 [5]) 即

$$a_n = \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} b_r \Leftrightarrow b_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \binom{n}{r} a_r$$

由 (15) 得

$$\begin{aligned} &C^{(\leq \ell)}_{(=k)}(n,d) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} C^{(\leq \ell)}_{(\leq i)}(n,d) \\ &= P^{(\leq \ell)}_{n,d} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i(i-1)^{d-1} \\ &= P^{(\leq \ell)}_{n,d} \sum_{i=2}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i(i-1)^{d-1} \quad (16) \end{aligned}$$

由 (11) 便得

$$\begin{aligned} &D^{(\leq \ell)}_{(=k)}(n,d) \\ &= P^{(\leq \ell)}_{n,d} \frac{1}{k!} \sum_{i=2}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i(i-1)^{d-1} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i=2}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i(i-1)^{d-1} \\ &\quad \sum_{j=0}^{\min(d,\lfloor (n-d)/\ell \rfloor)} (-1)^j \binom{d}{j} \\ &\quad \binom{n-\ell j-1}{d-1} \quad (17) \end{aligned}$$

對於另外的正規密碼, 顯然

$$D^{(=\ell)}_{(=k)}(n,d) = D^{(\leq \ell)}_{(=k)}(n,d) - D^{(\leq \ell-1)}_{(=k)}(n,d) \quad (18)$$

$$D^{(\leq \ell)}_{(\leq k)}(n,d) = \sum_{j=1}^{k} D^{(\leq \ell)}_{(=j)}(n,d) \quad (19)$$

回想起第一, 三節的結果, 我們可以檢驗

$$\sum_{i=k}^{n} D^{(\leq n)}_{(=k)}(n,i) = S(n,k)$$

$$\sum_{i=k}^{n} \sum_{j=1}^{n} D^{(\leq n)}_{(=j)}(n,i) = \sum_{j=1}^{n} S(n,j) = B(n)。$$

還可以得到關於 $C^{(\leq \ell)}_{(\leq k)}(n,d)$ 的下列遞歸關係

$$C^{(\leq \ell)}_{(\leq k)}(n,d) = (k-1) \sum_{j=1}^{k} C^{(\leq \ell)}_{(\leq k)}(n-j,d-1), \quad 1 \leq \ell < n \quad (20)$$

$$C^{(\leq \ell)}_{(\leq k)}(n,d) = \binom{n-1}{d-1} k(k-1)^{d-1}, \quad \ell = n \quad (21)$$

上述兩式可以如下證明: 設一個相伴正規密碼的最後一個貫是 R 且 R 的長度是 j, $1 \leq j \leq \ell, 1 \leq \ell \leq n$。刪去 R, 便得一個帶參數 $n-j, d-1, (\leq k), (\leq \ell)$ 的相伴正規密碼, 這類密碼的個數是 $C^{(\leq \ell)}_{(\leq k)}(n-j,d-1)$ 注意到恢復 R 的方法有 $k-1$ 種。對 j 求和由1到 ℓ, $1 \leq \ell \leq n-1$, 便得 (20)。若 $\ell = n$, n 的恰有 d 部分的有序分拆數是 $\binom{n-1}{d-1}$。而放 k 類字母在 d 部分的方法數是 $k(k-1)^{d-1}$, 便得 (21) 式。

下面試驗證我們的結果。由 (17) 式,

$$D_{(=3)}^{(\le 2)}(5,4)=\frac{1}{3!}\sum_{i=2}^{3}(-1)^{3-i}\binom{3}{i}i(i-1)^{4-i}$$
$$\cdot(-1)^0\binom{4}{0}\binom{5-0-1}{4-1}$$
$$=12$$

符合條件的所有正規密碼是: $AABAC$, $AABCA$, $AABCB$, $ABAAC$, $ABACC$, $ABBAC$, $ABBCB$, $ABCAA$, $ABCBB$, $ABCCA$, $ABCCB$。

類似地, $D_{(=2)}^{(\le 2)}(5,4)=4$, 它們是 $AABAB$, $BAABA$, $ABAAB$, $BABAA$,

$$D_{(=1)}^{(\le 2)}(5,4)=0$$
$$D_{(=3)}^{(\le 1)}(5,4)=0$$

由 (18) $D_{(=3)}^{(=2)}(5,4)=D_{(=3)}^{(\le 2)}(5,4)-D_{(=3)}^{(\le 1)}(5,4)=12-0=12$ 由 (19)

$$D_{(\le 3)}^{(\le 2)}(5,4)=\sum_{j=1}^{3}D_{(j=2)}^{(\le 2)}(5,4)$$
$$=D_{(=1)}^{(\le 2)}(5,4)+D_{(=2)}^{(\le 2)}(5,4)$$
$$+D_{(=3)}^{(\le 2)}(5,4)$$
$$=0+4+12=16$$

最後, 我們也可以考慮有空隔的帶參數 n, k, d, ℓ 的正規密碼的計數, 沿用上述記號, 把 M 代替 C 表示增加如第三節的有空隔制的計數, 用類似方法可得

$$M_{(=k)}^{(\le \ell)}(n,d)=\sum_{r=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n-r-1}{r}D_{(=k)}^{(\le \ell)}$$
$$\cdot D_{(=k)}^{(\le \ell)}(n,d)$$

參考文獻

1. S. W. Golomb, On the Enumeration of Cryptograms, Mathematics magazine 53, No. 4 (1980), 219-221.
2. 柳柏濂, 欄柵前面的思考—不含定距元素的組合問題, 數學傳播, 第二十一卷第一期, 29-34。
3. Liu Bolian, A Note on the Enumeration of Cryptograms, Menemui Mat. 13(1991), 57-63.
4. 柳柏濂, 別瞧不起它, 那個中學教材中的式子, 數學傳播, 第二十一卷第四期。
5. 柳柏濂, 阿凡提巧拆金環與完備分拆, 數學傳播, 第二十一卷第三期, 73-79。

—本文作者任教於中國華南師範大學數學系和廣東職業技術師範學院計算機系—

周鴻經先生事略

周鴻經綸閣先生，生於民國前十年，歿於民國四十六年，享年五十有六。先生天性淳厚，篤於孝友，英年績學，才華卓著。歷任中央大學數學系主任、訓導長、教務長、校長及中央研究院總幹事兼數學研究所所長。畢生從事數學研究及教育工作，不遺餘力。

先生早年留學英國，於抗戰時期毅然返國，共赴國難。戰時艱苦，衣食為勞，而先生仍能創著不絕，年有新猷，於富氏級數方面先後發表論文二十二篇，為當時國內年輕數學家之典範。

先生不僅對數學研究有卓異造詣，其於教育行政亦有建樹。多年執教，桃李滿天下，受其薰陶者，莫不眷眷於懷。

先生於努力研究之餘，曾在各報章雜誌發表諸多數學教育文章，並編著中學教科書多冊為當時中學普遍採用，對於日後數學教育之改革有深遠之影響。

中央研究院周鴻經獎學金章程

第一條　中央研究院為紀念數學研究所周故所長鴻經，鼓勵有志研習數學之學生，設置數學獎學金。

第二條　本獎學金暫定十二名，每名每年暫定新台幣貳萬元。

第三條　凡公私立大學或學院之數學系三年級以上學生或數學研究所之研究生數學成績優異者均可申請。

第四條　申請本獎學金之學生應於每年十一月十五日前，由所屬院校將下列各件彙送本院：

(1)志向說明書：

(2)在學各學年之成績單（一年級研究生須繳大學四年之成績單）

(3)數學系、所之教授二人以上之推薦書。

第五條　本獎學金之審核由本院數學研究所組織委員會行之，必要時得舉行面試，其結果於每年十二月十五日發表。獎學金於十二月及三月各付給總數之半。

第六條　本章程經院務會議通過院長核定後施行。





有了"數學傳播季刊選輯"
讓您大開眼界！

■數學傳播季刊創刊十年的里程碑
■由數十位專家共同執筆
■數學傳播季刊編輯部精心編輯
■適合高中以上程度閱讀

數學傳播季刊選輯

台北市南港區研究院路二段128號（電話：2785-1211轉382）
郵政劃撥：中央研究院數學研究所　帳號：0100434-8